Memento... racines carrées

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur http://www.bibmath.net

1. Définition :

On appelle racine carrée d'un nombre a (avec a ≥ 0), le nombre b (avec b ≥ 0) tel que $b^2 = a$.
Ainsi , 3 est la racine carrée de 9 parce que $3^2 = 9$. La racine carrée du nombre a se note $\sqrt{a}$. Le a se nomme ***radicande****, et le symbole $\sqrt{\ }$ a pour nom* ***radical.***

La racine carrée d'un nombre quelconque ne donne pas forcément un nombre entier, ni décimal, ni même fractionnaire, ainsi $\sqrt{2} \approx 1{,}414...$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}732...$ ne se "terminent" pas. On pourrait démontrer assez simplement que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction....
Il n'empêche, et cela résulte de la définition, que : $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$ ou $(\sqrt{2^2}) = 2$ et $(\sqrt{3^2}) = 3$
Attention ! $\sqrt{-2}$ n'existe pas : la définition montre qu'on ne peut trouver aucun nombre dont le carré soit -2 ou plus généralement un nombre négatif

2. Propriétés :

Pour comprendre (et retenir) les propriétés des racines carrées, il est opportun de bien comprendre qu'il n'y a (presque) rien de nouveau à savoir... si l'on connaît bien les règles des puissances !

En effet, on notera (bien plus tard, en Lycée) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ **.**

a) De même que $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2$ **, alors** $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ **et, bien sûr** $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

b) De même que $\frac{3^2}{5^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$, alors $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et, bien sûr, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3. Types de calculs

a) Simplifier une racine carrée (encore dit : extraire un carré du radical)

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $\sqrt{252} = \sqrt{36 \times 7} = \sqrt{36} \times \sqrt{7} = 6 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

L'expression *extraire un carré du radical* explique bien ce qu'on attend dans ce type d'exercice :
l'idée est de décomposer le nombre donné en un produit et en utilisant les carrés usuels de la table de multiplication : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 12, 144, 169, 196, 225, 256... carrés respectifs de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16...
Il faut rechercher ensuite le plus grand carré inférieur au radicande, de vérifier que le 2nd divise bien le 1er, puis d'utiliser la propriété 2) a) et la définition.
On pouvait aussi le faire en plusieurs fois : $\sqrt{252} = \sqrt{4 \times 63} = \sqrt{4 \times 9 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$
mais ne pas s'arrêter à mi-chemin.

b) Simplifier une somme de racine carrées

C'est une simple extension du calcul précédent :
Écrire $2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$ *sous la forme ,* $a\sqrt{b}$ *où a est un nombre entier relatif et b, un entier naturel le plus petit possible.*

$$2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{25 \times 5} - 7\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{5} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 21\sqrt{5} = -9\sqrt{5}$$

c) Effectuer et simplifier un produit

- $B = 7\sqrt{15} \times 2\sqrt{35} \times \sqrt{3} = 14\sqrt{15 \times 35 \times 7} = 14\sqrt{(3 \times 5) \times (5 \times 7) \times (7 \times 3)} = 14\sqrt{3^2 \times 5^2 \times 7} = 14 \times 3 \times 5 \times \sqrt{7} = 210\sqrt{7}$
- $(2 - 3\sqrt{5})(15 + 2\sqrt{5}) = 2 \times 15 + 2 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \times 15 - 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 30 + 4\sqrt{5} - 45\sqrt{5} - 6 \times 5 = -41\sqrt{5}$

Il s'agit donc d'utiliser les techniques de développement déjà vues par ailleurs, sans oublier, bien sûr, les... produits remarquables :

$$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 7)(2\sqrt{2} - 7) = 4^2 + 2 \times 4 \times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 7^2 = 16 + 40\sqrt{2} + 50 + 8 - 49 = 25 + 40\sqrt{2}$$