

**ECOLE NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE**

CONCOURS D'ADMISSION 2022

**LUNDI 25 AVRIL 2022
08h00 - 12h00**

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée : 4 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Le sujet comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.

Début de l'épreuve

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans \mathbb{R}^d , nous noterons:

- $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x et y ,

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$, la norme euclidienne usuelle de x ,
- $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$ le segment joignant x à y ,

On rappelle qu'une partie A de \mathbb{R}^d est convexe si pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $[x, y] \subset A$. Si A et B sont deux parties non vides de \mathbb{R}^d , $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b, a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A := \{\lambda a, a \in A\}, \\ A - B &:= A + (-1)B, \quad A - x := A - \{x\} \end{aligned}$$

nous noterons $\dim(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $A - a$ où a est un élément quelconque de A (cette définition étant indépendante du choix de $a \in A$). En particulier si x et y appartiennent à \mathbb{R}^d et $x \neq y$, on a $\dim(\{x\}) = 0$, et $\dim([x, y]) = 1$.

Pour $M \in \mathcal{M}_{m \times d}(\mathbb{R})$, nous identifierons toujours M à l'application linéaire dont M est la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^m et noterons donc

$$\text{Ker}(M) := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = 0\}, \quad \text{Im}(M) := \{Mx, x \in \mathbb{R}^d\}$$

enfin M^T désignera la transposée de M .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous noterons \mathbb{R}_+^k l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^k dont les coordonnées sont dans \mathbb{R}_+ et pour y_1 et y_2 dans \mathbb{R}^k , nous écrirons $y_1 \geq y_2$ (ou $y_2 \leq y_1$) quand $y_1 - y_2 \in \mathbb{R}_+^k$.

On rappelle enfin que toute suite bornée d'éléments de \mathbb{R}^k possède une extraction qui converge.

Partie I: Projection et séparation

Projection

Soit C une partie non vide, convexe et fermée de \mathbb{R}^d et $x \in \mathbb{R}^d$, considérons:

$$\inf_{y \in C} \|x - y\|^2. \quad (1)$$

1) Montrer que (1) possède une unique solution (c'est à dire qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\|^2 \leq \|x - z\|^2$ pour tout $z \in C$) que nous appellerons projection de x sur C et noterons $\text{proj}_C(x)$. Montrer que $x = \text{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}^d$ montrer que

$$y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } (x - y) \cdot (z - y) \leq 0, \forall z \in C.$$

3) Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$(\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2,$$

et en déduire que proj_C est continue.

4) Déterminer explicitement proj_C dans les cas suivants:

$$i) C = \mathbb{R}_+^d, \quad ii) C = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq 1\},$$

$$iii) C = \{y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i \leq 1\}, \quad iv) C = [-1, 1]^d.$$

Séparation

Soit C et D deux parties convexes non vides de \mathbb{R}^d telles que

$$C \text{ est fermée et bornée, } D \text{ est fermée, et } C \cap D = \emptyset.$$

5) Montrer que $D - C$ est une partie convexe fermée de \mathbb{R}^d ne contenant pas 0.

6) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in C \times D.$$

(on dit que C et D peuvent être séparés strictement).

- 7) Soit C une partie convexe fermée non vide de \mathbb{R}^d et soit $\sigma_C: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par:

$$\sigma_C(p) := \sup\{p \cdot x, x \in C\}$$

montrer que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \leq \sigma_C(p), \forall p \in \mathbb{R}^d\}$$

(de sorte que C est une intersection de demi-espaces fermés).

- 8) Soit A une partie convexe non vide de \mathbb{R}^d et $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que

$$p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in A.$$

Partie II: Points extrémaux

Soit E une partie de \mathbb{R}^d , on appelle enveloppe convexe de E et l'on note $\text{co}(E)$ l'ensemble

$$\text{co}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i, I \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^I \lambda_i = 1, (x_1, \dots, x_I) \in E^I \right\}.$$

Soit A une partie convexe non vide de \mathbb{R}^d , nous dirons que $x \in A$ est un point extrémal de A si $\forall (y, z, \lambda) \in A \times A \times]0, 1[$, on a

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z \Rightarrow y = z.$$

Nous noterons $\text{Ext}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A .

Cas particuliers

- 9) Soit A une partie convexe non vide de \mathbb{R}^d . Soit $I \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_I \in A^I$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_I) \in \mathbb{R}_+^I$ tels que $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$, montrer que:
- a) $\sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in A$,
 - b) si $x := \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in \text{Ext}(A)$ alors $x_i = x$ pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$ tel que $\lambda_i > 0$.
- 10) Soit E une partie de \mathbb{R}^d montrer que $\text{co}(E)$ est le plus petit convexe contenant E et que $\text{Ext}(\text{co}(E)) \subset E$.

11) Soit $A = \text{co}(E)$ où E est la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$E = \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \cup \{(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

montrer que $\text{Ext}(A)$ est non vide et n'est pas fermée.

12) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$ et $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : p_i \cdot x \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$$

soit non vide. Montrer que A est convexe et fermée. Soit $x \in A$, soit $I(x) := \{i \in \{1, \dots, k\} : p_i \cdot x = b_i\}$, montrer que

$$x \in \text{Ext}(A) \iff \text{rang}(\{p_i, i \in I(x)\}) = d$$

en déduire que $\text{Ext}(A)$ est un ensemble fini (éventuellement vide) dont le cardinal est inférieur ou égal à 2^k .

Cas d'un convexe fermé borné

Dans les trois questions qui suivent, K est une partie non vide, convexe, fermée et bornée de \mathbb{R}^d .

13) Soit $p \in \mathbb{R}^d$, posons

$$K_p := \{x \in K : p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in K\}.$$

Montrer que K_p est non vide, convexe et fermée et que $\text{Ext}(K_p) \subset \text{Ext}(K)$.

14) Montrer que $\text{Ext}(K)$ est non vide (on pourra se ramener au cas où $0 \in K$ et raisonner sur la dimension de K).

15) Montrer que $K = \text{co}(\text{Ext}(K))$.

Partie III: Un résultat de dualité

Cônes convexes

On dit qu'une partie F de \mathbb{R}^d est un cône si $\lambda F \subset F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Soit E une partie non vide de \mathbb{R}^d , le cône polaire de E est défini par

$$E^+ := \{p \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \geq 0, \forall x \in E\}$$

et son cône bi-polaire par

$$E^{++} = (E^+)^+ := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \cdot p \geq 0, \forall p \in E^+\}.$$

- 16) Montrer que E^+ et E^{++} sont des cônes convexes fermés et que $E \subset E^{++}$.
- 17) Montrer que $E = E^{++}$ si et seulement si E est un cône convexe fermé.
- 18) Soit ξ_1, \dots, ξ_k , k éléments de \mathbb{R}^d et

$$F := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \right\}$$

montrer que F est un cône convexe fermé. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, montrer que l'équivalence entre:

- $\xi \in F$,
- $\xi \cdot x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\xi_i \cdot x \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

Programmation linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$, $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ et $p \in \mathbb{R}^d$. Posons

$$\alpha := \inf \left\{ p \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, x \geq 0, Mx \leq b \right\}$$

et

$$\beta := \sup \left\{ b \cdot q : q \in \mathbb{R}^k, q \leq 0, M^T q \leq p \right\}$$

(en adoptant la convention: $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$).

- 19) Montrer que $\alpha \geq \beta$.
- 20) On suppose qu'il existe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\bar{x} \geq 0, M\bar{x} \leq b \text{ et } p \cdot \bar{x} = \alpha.$$

En notant M_i le vecteur de \mathbb{R}^d dont les coordonnées sont les coefficients de la i -ème ligne de M , posons:

$$I := \{i \in \{1, \dots, k\} : M_i \cdot \bar{x} = b_i\}$$

et

$$J := \{j \in \{1, \dots, d\} : \bar{x}_j = 0\}.$$

- a) Montrer que $p \cdot z \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$z_j \geq 0 \text{ pour tout } j \in J \text{ et } M_i \cdot z \leq 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

- b) Montrer qu'il existe $\bar{q} \in \mathbb{R}^k$ tel que:

$$\bar{q} \leq 0, M^T \bar{q} \leq p, \bar{q} \cdot (M\bar{x} - b) = 0 \text{ et } (p - M^T \bar{q}) \cdot \bar{x} = 0.$$

- c) Montrer que $b \cdot \bar{q} = \alpha = \beta$.

Partie IV: Systèmes linéaires sous-déterminés

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|, \|x\|_\infty := \max\{|x_i|, i = 1, \dots, d\}$$

$$I_+(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i > 0\}, I_-(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i < 0\}$$

et

$$I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i = 0\}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$ et supposons que

$$\text{rang}(M) = k.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, l'objectif de cette partie est de trouver une solution du système linéaire

$$Mx = b \tag{2}$$

ayant au plus k coordonnées non nulles par une méthode de minimisation. Pour ce faire, on s'intéresse à:

$$r := \inf\{\|x\|_1, x \in \mathbb{R}^d, Mx = b\}. \tag{3}$$

21) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|x\|_1 = \max\{x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_\infty \leq 1\},$$

et

$$\|x\|_\infty = \max\{x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_1 \leq 1\}.$$

22) Notons C l'ensemble:

$$C := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = b, \|x\|_1 = r\}.$$

Montrer que C est non vide, convexe, fermé et borné.

- 23) Fixons $\bar{x} \in C$. Montrer qu'il existe $q \in \text{Ker}(M)^\perp \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on ait

$$q_i \bar{x}_i = \|q\|_\infty |\bar{x}_i|.$$

- 24) Soit K l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$My = b, y_i = 0 \quad \forall i \in I_0(\bar{x}), q_i y_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Montrer que K est non vide et inclus dans C .

- 25) Montrer que si $y \in \text{Ext}(K)$ alors

$$h \in \text{Ker}(M) \text{ et } I_0(y) \subset I_0(h) \Rightarrow h = 0.$$

- 26) En déduire que si $y \in \text{Ext}(K)$ alors le cardinal de $I_+(y) \cup I_-(y)$ est inférieur ou égal à k .

Fin du sujet.