Concours Mines-Ponts 2001 MP - Sujet 2 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart, et a bénéficié des remarques judicieuses de Christian Alger. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : meilleure approximation polynômiale, module de continuité, série de Fourier, convolution, diagonalisation, polynômes orthogonaux

Commentaires : C'est un problème assez classique, qui fait approcher des fonctions continues par des polynômes. Dans la première partie, on voit que la rapidité de convergence est proportionnelle à la lissicité de la fonction. Dans la deuxième, on construit effectivement une suite de polynômes qui converge uniformément vers toute fonction continue. Le mélange entre les parties analyse et les parties algèbre fait de ce problème un bon test des connaissances de prépa. Tout à fait dans le style "Mines/Ponts"!

Première Partie

I.1.a. Nous commençons par prouver que le module de continuité est défini sur $]0,+\infty[$. Soit donc $h>0$. Alors, pour tout x, y de I, avec $|x-y|\leq h$, on a :

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq|\varphi(x)|+|\varphi(y)|\leq 2M,$$

où $|\varphi|$ est bornée par M. L'ensemble $A_h=\{|\varphi(x)-\varphi(y)|;\ |x-y|\leq h,\ x,y\in I\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée : il possède une borne supérieure, ce qui prouve l'existence de $\omega_\varphi(h)$. En outre, pour $0<h\leq h'$, alors $A_h\subset A_{h'}$, ce qui prouve $\sup(A_h)\leq\sup(A_{h'})$, ou encore $\omega_\varphi(h)\leq\omega_\varphi(h')$: ω_φ est croissante!

I.1.b. Si x,y sont dans I, avec $|x-y|\leq h+h'$, soit z dans le segment $[x,y]$ (ou $[y,x]$) tel que $|x-z|\leq h$ et $|z-y|\leq h'$. Alors :

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)| &\leq |\varphi(x)-\varphi(z)|+|\varphi(z)-\varphi(y)|\\ &\leq \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h').\end{aligned}$$

On passe à la borne supérieure pour tous les x,y de ce type :

$$\omega_\varphi(h+h')\leq\omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h').$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que :

$$\omega_\varphi(nh)\leq n\omega_\varphi(h).$$

Si $0<\lambda<1$, on a : $\omega_\varphi(\lambda h)\leq\omega_\varphi(h)\leq(1+\lambda)\omega_\varphi(h)$. Sinon, on pose $n=[\lambda]$, et :

$$\begin{aligned}\omega_\varphi(\lambda h) &\leq \omega_\varphi(nh)+\omega_\varphi((\lambda-n)h)\\ &\leq n\omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h)\\ &\leq (1+n)\omega_\varphi(h)\\ &\leq (1+\lambda)\omega_\varphi(h).\end{aligned}$$

I.1.c. C'est juste la définition de l'uniforme continuité qu'on nous demande de formuler!!! Si φ est uniformément continue, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leq \eta \implies |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \varepsilon$. En passant à la borne sup, on voit que $\omega(\eta) \leq \varepsilon$, et pour tout $0 < h < \eta$, alors $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(\eta) \leq \varepsilon$. C'est bien que $\lim_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$. La réciproque est encore plus facile.

I.1.d. Si φ' est continue sur le segment I, elle est bornée par φ', et le théorème des accroissements finis nous dit que φ est k-lipschitzienne, avec $k = \|\varphi'\|$. En particulier, $|x-y| \leq h$ implique $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq h\|\varphi'\|$.

I.2.a. Nous avons :

$$\frac{1}{\lambda_n 2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^4 d\theta = 1.$$

En utilisant la propriété admise pour F_n :

$$\lambda_n = \frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ik\theta}\right)^2 d\theta.$$

Mais $\int_0^{2\pi} e^{ij\theta}d\theta = 0$, pour j entier non nul, et :

$$\left(\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ik\theta}\right)^2 = \sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)^2 e^{2ik\theta} + \sum_{j=-n+1}^{n-1}\sum_{\substack{k=-n+1,\\ k\neq j}}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\left(1-\frac{|j|}{n}\right)e^{i(k+j)\theta}.$$

En intégrant, nous ne gardons que les termes pour lesquels $e^{2ik\theta} = 1$ et $e^{i(k+j)\theta} = 1$. On trouve donc :

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)^2 d\theta\\ &= n^2\left(1+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{2j}{n}+\frac{j^2}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant le rappel du texte :

$$\begin{aligned}\lambda_n &= n^2\left(1+\frac{(n-1)(2n-1)}{3n}\right)\\ &= \frac{2n^3+n}{3}.\end{aligned}$$

En particulier, à l'infini, $\lambda_n \sim \frac{2n^3}{3}$.

I.2.b. Nous savons que :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{t^4} = \frac{t^4 - \sin^4 t}{t^4\sin^4 t}.$$

Nous effectuons un développement limité :

$$\sin^4(t) = \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^4 = t^4 - A_1 t^6 + o(t^6),$$

avec $A_1 \neq 0$. D'où :

$$\alpha(t) = \frac{A_1 t^6 + o(t^6)}{t^8 + o(t^8)},$$

ce qui prouve bien que α est équivalente en 0 à $A_1 t^{-2}$. Si on note $\beta(t) = t^3\alpha(t)$, alors $\beta(t) \sim A_1 t$ en 0, et donc β est bornée sur un voisinage de 0, mettons sur $]0,\delta]$. Sur $[\delta,\pi/2]$, β est une fonction continue sur un compact, donc est bornée.

Remarquons que dans l'expression de I_n, il n'y a pas de singularité en 0, car la fonction se prolonge par continuité en 0! Nous effectuons le changement de variable $u = nt$ dans I_n :

$$I_n = n^2 \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt.$$

Maintenant, remarquons que $\left|\frac{\sin^4 t}{t^3}\right| \leq \frac{1}{t^3}$, et donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin^4 t}{t^3}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En particulier :

$$I_n = n^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt - n^2 \int_{n\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt.$$

On en déduit :

$$\frac{I_n}{n^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt} = 1 - \frac{\int_{n\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt}{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt}.$$

On conclut car $\int_{n\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Pour estimer J_n, remarquons la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt$, puis le fait que $\alpha(t) \leq \frac{A_2}{t^3}$ si $t \in]0,\pi/2[$. D'où :

$$\begin{aligned} J_n &\leq \int_0^{\pi/2} A_2 \frac{\sin^4(nt)}{t^2} dt \\ &\leq A_2.n \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt \\ &\leq A_2.n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

I.2.c. Remarquons d'abord que l'intégrale est positive, car la quantité à intégrer l'est. Ensuite, nous avons :

$$\int_0^{\pi} (1+nt) K_n(t) dt = \int_0^{\pi} K_n(t) dt + \frac{n}{\lambda_n} \int_0^{\pi} t \frac{\sin^4(nt/2)}{\sin^4(t/2)} dt.$$

Pour la première intégrale, la majoration est facile :

$$\int_0^{\pi} K_n(t) dt \leq \int_0^{2\pi} K_n(t) dt \leq 2\pi.$$

D'autre part, pour $t \in]0,\pi[$,

$$\begin{aligned} t\frac{\sin^4(nt/2)}{\sin^4(t/2)} &= t \sin^4(nt/2) \left[\frac{1}{\sin^4(t/2)} - \frac{1}{(t/2)^4}\right] + t\frac{\sin^4(nt/2)}{(t/2)^4} \\ &= t\alpha(t/2) \sin^4(nt/2) + 16 \frac{\sin^4(nt/2)}{t^3}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{n}{\lambda_n} \int_0^{\pi} t\alpha(t/2) \sin^4(nt/2) dt &\leq C_0 \frac{n}{\lambda_n} \int_0^{\pi/2} t\alpha(t) \sin^4(nt) dt \\ &\leq C_1 \frac{n^2}{\lambda_n} \\ &\leq C_2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de l'équivalent de λ_n obtenu en I.2.a. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{n}{\lambda_n}\int_0^\pi \frac{\sin^4(nt/2)}{t^3} &= C_2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4(nt)}{t^3}dt \\ &\sim_{+\infty} C\frac{n}{\frac{2n^3}{3}}n^2. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est donc elle aussi bornée, ce qui permet de conclure.

I.3.a. Nous allons utiliser un procédé fort utile en mathématiques, qui s'appelle la convolution, et permet d'approcher des fonctions par des fonctions plus régulières! Prouvons d'abord que $j_n[g]$ est pair. En effet, si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} j_n[g](-\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(-\theta-t)K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta+t)K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-t)K_n(-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-t)K_n(t)dt \\ &= j_n[g](\theta). \end{aligned}$$

Ensuite, nous savons (nous l'avons déjà constaté à la question I.2.a.) que K_n est un polynôme trigonométrique de degré $2n-2$. En particulier, il existe des réels a_j, pour $-(2n-2)\leq j\leq 2n-2$, tels que :

$$K_n(\theta) = \sum_{j=-2n+2}^{2n-2} a_j e^{ij\theta}.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} j_n[g](\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-t)K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)K_n(\theta-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sum_{j=-2n+2}^{2n-2} a_j e^{ij\theta}e^{-iju}du \\ &= \sum_{j=-2n+2}^{2n-2}\left(\frac{a_j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)e^{-iju}du\right)e^{ij\theta}. \end{aligned}$$

Contrairement à ce que l'énoncé annonce, on ne trouve pas un polynôme, mais bel et bien un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $2n-2$. Remarquons qu'en fait, la parité de $j_n[g]$ nous permet d'écrire :

$$j_n[g](\theta) = \sum_{j=0}^{2n-2} b_j\cos(j\theta).$$

On se servira de ce résultat en I.4.a.

I.3.b. Clairement, $|\theta-(\theta-t)|\leq |t|$, d'où :

$$|g(\theta)-g(\theta-t)| \leq \omega_g(|t|) = \omega_g\left(n|t|\times\frac{1}{n}\right) \leq (1+n|t|)\,\omega_g\left(\frac{1}{n}\right),$$

où on s'est servi librement des résultats de I.1.b. Par suite :

$$\begin{aligned}
|g(\theta) - j_n[g](\theta)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - t) - g(\theta)|K_n(t)dt \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} (1 + n|t|)K_n(t)dt\omega_g\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\leq M_0\omega_g\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

où on a utilisé I.2.c, et la parité de K_n.

I.4.a. D'après ce que nous avons annoncé, $P_n(x) = \sum_{j=0}^{2p} b_j \cos(jArc\cos(x))$. Comme il est admis que $x \mapsto \cos(jArc\cos x)$ est un polynôme de degré j, P_n est un polynôme de degré au plus $2p \leq n$.

I.4.b. Nous savons que $\Delta_n(f) \leq \|f - P_n(f)\|$. Si $x \in [-1,1]$, soit θ tel que $\cos\theta = x$. Alors :

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= |g(\theta) - j_{p+1}[g](\theta)| \\
&\leq M_0\omega_g\left(\frac{1}{p+1}\right).
\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que $\omega_g\left(\frac{1}{p+1}\right) \leq 2\omega_g\left(\frac{1}{n}\right)$, ce que l'on fait grâce à I.1.a, et :

$$\omega_g\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_g\left(\frac{1}{n}\right) \geq \omega_g\left(\frac{2}{n}\right) \geq \omega_g\left(\frac{1}{p+1}\right).$$

I.4.c. Si l'on y réfléchit un peu, c'est presque évident, car si (Q_n) est par exemple une suite de polynômes qui permet d'approcher $\Delta_n(f)$, alors $(Q_n - Q)$ permettra d'approcher $\Delta_n(f - Q)$.
Si f est continûement dérivable sur I, d'après I.4.b. et I.1.d., nous savons que, pour tout polynôme de degré $\geq n$, alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(f) &= \Delta_n(f - Q) \leq 2M_0\omega_{f-Q}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\leq 2\frac{M_0}{n}\|f' - Q'\|.
\end{aligned}$$

Maintenant, on prend l'inf de tous les polynômes Q dans E_n : Q' décrit alors E_{n-1}, et $\inf\{\|f' - Q'\|;\ Q \in E_n\} = \Delta_{n-1}(f')$. CQFD.

I.4.d. Par récurrence immédiate :

$$\Delta_n(f) \leq \frac{(2M_0)^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\Delta_{n-k}(f^{(k)}). \tag{1}$$

Maintenant, $f^{(k)} \in \mathcal{C}$, et d'après I.4.b. :

$$\Delta_{n-k}(f^{(k)}) \leq 2M_0\omega_{f^{(k)}}\left(\frac{1}{n-k}\right).$$

Mais $f^{(k)}$ est uniformément continue sur I, car continue sur ce compact (on applique le théorème de Heine), donc $\omega_{f^{(k)}}\left(\frac{1}{n-k}\right) \to 0$ si $n \to +\infty$. Il en est de même de $\Delta_{n-k}(f^{(k)})$. Ceci, couplé à (1) donne $\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Deuxième Partie

II.1.a. E_n^0 est de degré $n-1$. C'est en effet le noyau de l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl}\phi : E_n & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & P((-1),P(1)),\end{array}$$

qui est de rang 2.

Remarquons ensuite que les polynômes e_k sont tous dans E_n^0, et comme leurs degrés sont étagés (ie ils ont deux à deux des degrés différents), on prouve facilement que $(e_k)_{2\leq k\leq n}$ est une famille libre. Comme elle comprend $n-1$ éléments, la connaissance de la dimension de E_n^0 fait que l'on sait que c'est une base de cet espace vectoriel.

II.1.b. Il suffit en fait de prouver que, pour k compris entre 2 et n, alors $deg(\phi_n(e_k)) \leq k$. C'est évident.

Pour calculer les éléments diagonaux, il suffit de calculer le coefficient dominant. Mais :

$$\begin{aligned}\phi_n(e_k)(x) &= (1-x^2)\big(k(k-1)x^{k-2}+R(x)\big) \quad \text{où } deg(R)\leq k-3 \\ &= -k(k-1)x^k+Q(x) \quad \text{où } deg(Q)\leq k-1.\end{aligned}$$

Les coefficients diagonaux sont donc les $-k(k-1)$, pour k allant de 2 (le terme en haut à gauche) jusque n.

En particulier, le polynôme caractéristique de ϕ_n est :

$$(X+2)(X+3\times 2)\dots(X+n(n-1)).$$

Il est scindé, à racines simples, donc l'endomorphisme ϕ_n est diagonalisable, les valeurs propres étant les $\mu_k=-k(k-1)$. En particulier, il existe une base $(Q_k)_{2\leq k\leq n}$ de vecteurs propres, Q_k étant associé à μ_k. Si $Q_k(x)=a_px^p+\dots$, le coefficient dominant de $(1-x^2)Q_k''$ est $-a_pp(p-1)$, et l'égalité des coefficients dominants de $-k(k-1)Q_k$ et $(1-x^2)Q_k''$ donne : $a_pp(p-1)=a_pk(k-1)$. Donc $p=k$ et le degré de Q_k est k.

II.1.c. Comme 1 et -1 sont racines de P, $P(x)=R(x)(1-x)(1+x)$. Alors,

$$\frac{P(x)Q(x)}{1-x^2}=R(x)Q(x)$$

se prolonge par continuité en 1 et -1, et l'intégrale est effectivement définie. En outre, si $J(P,P)=0$, c'est, avec les mêmes notations, que $\int_{-1}^1(1-x^2)R^2(x)dx=0$, ce qui n'est possible ($x\mapsto(1-x^2)R^2(x)$ est continue et positive), que si R est identiquement nulle, soit P est le polynôme nul.

II.1.d. Pour $k\neq j$, nous calculons $(Q_j|Q_k)$ en remplaçant Q_j (resp Q_k) par son expression en fonction de Q_j'' (resp. Q_k''), puis en réalisant une intégration par parties. On trouve :

$$(Q_j|Q_k)=\int_{-1}^1\frac{Q_j(x)Q_k(x)}{1-x^2}dx=\int_{-1}^1\frac{Q_j''(x)Q_k(x)}{\mu_j}dx=-\frac{1}{\mu_j}\int_{-1}^1Q_j'(x)Q_k'(x)dx,$$

et

$$(Q_j,Q_k)=-\frac{1}{\mu_k}\int_{-1}^1Q_j'(x)Q_k'(x)dx.$$

Comme $\mu_j\neq\mu_k$, on a $(Q_j|Q_k)=0$: la base B' est orthogonale dans E_n^0.

II.2.a. Nous avons :

$$-n(n-1)\int_{-1}^1P(x)Q_n(x)dx=\int_{-1}^1(1-x^2)P(x)Q_n''(x)dx.$$

Comme $d^\circ P\leq n-3$, on a $d^\circ[(1-x^2)P]\leq n-1$ et $(1-x^2)P$ est un élément de E_{n-1}^0. En particulier, $(1-x^2)P(x)$ s'écrit $\sum_{k=2}^{n-1}c_kQ_k$, où les c_k sont des réels. D'où :

$$\int_{-1}^1(1-x^2)P(x)Q_n''(x)dx=\sum_{k=2}^{n-1}c_k\int_{-1}^1Q_k(x)Q_n''(x)dx.$$

Maintenant,

$$\int_{-1}^{1} Q_k(x)Q_n''(x)dx = \mu_n \int_{-1}^{1} \frac{Q_k(x)Q_n(x)}{1-x^2} = 0,$$

où la dernière égalité est conséquence de I.1.d. En résumé,

$$\int_{-1}^{1} P(x)Q_n(x)dx = 0.$$

II.2.b.i. C'est un raisonnement très classique quand on parle de polynômes orthogonaux, qu'il vaut mieux savoir faire! Si Q_n admet un zéro de multiplicité impair en x_i, alors Q_n s'annule et change de signe en x_i. Maintenant, $(x-x_i)Q_n(x)$ s'annule toujours en x_i, mais ne change plus de signe. Par conséquent, R_1Q_n garde un signe constant sur $[-1,1]$, n'est pas partout nulle, et est continue. Donc :

$$\int_{-1}^{1} R_1(x)Q_n(x)dx \neq 0.$$

En particulier, d'après l'alinéa a., $deg(R_1) \geq n-2$. Mais comme Q_n s'annule aussi en -1 et 1, R_n est de degré au plus $n-2$ (car Q_n a au plus n racines). D'où $deg(R_1) = n-2$.

II.2.b.ii. Si Q_n n'a pas de racines de multiplicité impaire dans $]-1,1[$, alors ce polynôme garde un signe constant, n'y est pas partout nul, et est continu : l'intégrale de Q_n sur I n'est donc pas nulle. Ceci contredit II.2.a., avec $P=1$. C'est donc que ce cas est impossible, et on est renvoyé à i. Mais le résultat de i. prouve que Q_n a au moins n racines distinctes : 1, -1, et les (x_i). Comme Q_n est de degré n, ce sont exactement les racines de Q_n : elles sont donc de multiplicité 1, et situées dans I.

II.3.a. u_n est clairement linéaire. En outre, si $u_n(P)=0$, alors P est un polynôme de degré au plus n qui possède au moins $n+1$ racines. P est donc le polynôme nul. On en déduit que u_n est injective, et comme $dim(E_n) = dim(\mathbb{R}^{n+1})$, u_n est un isomorphisme.
On en déduit immédiatement l'existence et l'unicité de $I_n[f]$. En outre :

$$I_n[f-P](y_k) = (f-P)(y_k) = (I_n[f]-P)(y_k),$$

et comme $I_n[f]-P \in E_n$, l'unicité nous permet de conclure à l'égalité de $I_n[f]-P$ et $I_n[f-P]$.

II.3.b. Q_{n+1} s'écrit : $Q_{n+1}(x) = (x-y_0)\dots(x-y_n)$, et donc $Q'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{i\neq j}(x-y_i)$. On en déduit que :

$$L_k(y_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

En particulier, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} f(y_k)L_k(x)$ vérifie $u_n(P) = (f(y_0),\dots,f(y_n))$. Comme $P \in E_n$, c'est bien que $P_n = I_n[f]$.

II.3.c. On a les inégalités successives :

$$\begin{aligned} |f(x) - I_n[f](x)| &\leq |f(x) - P(x) - (I_n[f]-P)(x)| \\ &\leq \|f-P\| + |I_n[f-P](x)| \\ &\leq \|f-P\| + \sum_{k=0}^{n} |(f-P)(y_k)||L_k(x)| \\ &\leq \left(1 + \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|\right) \|f-P\|. \end{aligned}$$

II.4.a. v_n est linéaire, et si $v_n(P)=0$, alors $(x-y_0)^2\dots(x-y_n)^2$ divise P, et comme $deg(P) \leq 2n+1$, nécessairement $P=0$, et v_n est un isomorphisme. L'existence, et l'unicité de $H_n[f]$ sont alors immédiates. $H_n[1]$ vaut bien sûr 1 (d'ailleurs $H_n(P)=P$ pour tout polynôme de degré $\leq 2n-1$).
Remarque : Démontrer le résultat admis n'est pas trop compliqué, mais juste un peu calculatoire. Il suffit de calculer l'expression de gauche, et sa dérivée, en y_k, et vérifier que l'on trouve $f(y_k)$ (resp. $f'(y_k)$).

II.4.b. Le calcul donne :
$$L_k'(x)=\frac{Q_{n+1}'(x)(x-y_k)-Q_{n+1}(x)}{(x-y_k)^2Q_{n+1}'(y_k)}.$$

Mais, d'une part :

$$Q_{n+1}'(x)(x-y_k)=Q_{n+1}'(y_k)(x-y_k)+Q_{n+1}''(y_k)(x-y_k)^2+o\big((x-y_k)^2\big),$$

et d'autre part :

$$Q_{n+1}(x)=Q_{n+1}'(y_k)(x-y_k)+\frac{Q_{n+1}''(y_k)}{2}(x-y_k)^2+o\big((x-y_k)^2\big).$$

On en déduit que :
$$L_k'(y_k)=\frac{Q_n''(y_k)}{2Q_{n+1}'(y_k)}.$$

Maintenant, d'après l'équation différentielle reliant Q_{n+1} à Q_{n+1}'', on a $Q_{n+1}''(y_k)=0$, soit $L(y_k)=0$ pour k allant de 1 à $n-1$. Pour calculer $L_0'(y_0)$ et $L_n'(y_n)$, nous allons dériver l'équation différentielle vérifiée par Q_{n+1} :
$$(1-x^2)Q_{n+1}^{(3)}(x)-2xQ_{n+1}''(x)=\mu_{n+1}Q_{n+1}'(x).$$

Pour $x=1$, on trouve :
$$L_0(y_0)=-\frac{\mu_{n+1}}{4}\geq 0.$$

De même :
$$L_n'(y_n)=\frac{\mu_{n+1}}{4}\leq 0.$$

II.4.c. Nous appliquons la formule admise pour calculer $H_n[f]$, avec $f=1$, et $x\in I$:

$$1=\sum_{k=0}^n L_k(x)^2-2(x-1)L_0'(y_0)-2(x+1)L_n'(y_n).$$

En nous aidant des signes de $L_0'(y_0)$ et $L_n'(y_n)$ déterminés auparavant :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n L_k(x)^2 &= 1+2(x-1)L_0'(y_0)+2(x+1)L_n'(y_n)\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

La deuxième inégalité se déduit en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II.5. Nous avonc donc :
$$\|f-I_n[f]\|\leq(1+\sqrt{n+1})\|f-P\|\leq 2\sqrt{n}\|f-P\|,$$

et ceci pour tout polynôme P de E_n. On optimise en P :

$$\|f-I_n[f]\|\leq 2\sqrt{n}\Delta_n(f).$$

En particulier, si f est continue, et dérivable, on sait que $\Delta_n(f)=o\left(\frac{1}{n}\right)$, et la suite de polynômes $(I_n[f])$ converge uniformément vers f sur I. Si f est C^∞, la convergence est très rapide, puisqu'en $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ pour tout $k\geq 0$.

Remarque : Nous approchons donc f par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points (y_k). Cela ne marcherait pas si on prenait des points d'interpolation équidistants (ce qui semblerait le plus logique), alors que cela convient parfaitement si on prend des racines successives de polynômes orthogonaux. Pour plus de renseignements à ce sujet, on pourra lire l'excellent livre de J.P. Demailly, *Analyse Numérique des Equations différentielles.*