Exercices - Concours Centrale 2019 - Filière PSI - Épreuve 1 - Corrigé (très) partiel : corrigé

Avertissement : Ceci n'est pas une correction *in extenso* de l'épreuve. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à `devgeolabo@gmail.com`

Problème 1 - Partie I A-

Q1. Remarquons d'abord que si α est un entier négatif ou nul, alors f_α est un polynôme et son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Sinon f_α est défini par $f_\alpha(x)=\exp(-\alpha\ln(1-x))$ qui est bien défini si $1-x>0$, donc si $x<1$. Dans ce cas, $\mathcal{D}=]-\infty,1[$.
Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et, pour tout $x\in\mathcal{D}\backslash\{1\}$, on a

$$f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{1-x}\exp(-\alpha\ln(1-x))=\frac{\alpha}{1-x}f_\alpha(x).$$

Ainsi, f_α vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathcal{D}$:

$$(1-x)y'(x)-\alpha y(x)=0$$

(cette équation est également vérifiée en $x=1$ si $1\in\mathcal{D}$, c'est-à-dire si $-\alpha\in\mathbb{N}$).

Q2. Soit I un intervalle, $a,b:I\to\mathbb{R}$ continue, $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle $y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ admet une unique solution y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant $y(x_0)=y_0$.
Posons $I=]-1,1[$. L'équation différentielle précédente se réécrit, sur I,

$$y'(x)-\frac{\alpha}{1-x}y(x)=0.$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, elle admet une unique solution définie sur I vérifiant $y(0)=1$: la fonction f_α.
Considérons ensuite la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n$. Alors, puisque

$$\frac{\frac{L_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}}{\frac{L_n(\alpha)}{n!}}=\frac{n+\alpha}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}1,$$

la règle de d'Alembert nous dit que cette série entière est de rayon de convergence 1. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $x\in I$,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=L_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}\right)x^n.\end{aligned}$$

Or, $L_1(\alpha)=\alpha=\alpha L_0(\alpha)$ et

$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}&=\frac{nL_{n+1}(\alpha)-L_n(\alpha)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)-n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n-n)}{n!}\\&=\alpha L_n(\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$(1-x)S'(x)=\alpha S(x).$$

Puisque $S(0)=L_0(\alpha)=1$, l'unicité dans le théorème de Cauchy nous dit que $S=f_\alpha$ sur $]-1,1[$, ce qui est le résultat demandé.

1. Rappelons l'énoncé du théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries entières : si $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et $B(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx_n$ sont deux séries entières, alors leur produit de Cauchy est la série entière $C(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}\right)x^n$. De plus, si A et B ont pour rayon de convergence respectifs R_A et R_B, alors le rayon de convergence de C vérifie $R_C\geq\min(R_A,R_B)$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|<\min(R_A,R_B)$, on a

$$C(x)=A(x)B(x).$$

2. Appliquons ce résultat avec $A(x)=f_\alpha(x)$ et $B(x)=f_\beta(x)$, dont la série produit est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n\frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{k!(n-k)!}\right)x^n.$$

Tenant compte du fait que $f_\alpha\cdot f_\beta=f_{\alpha+\beta}$ et que

$$\frac{1}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\frac{1}{n!},$$

on obtient pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{n!}\right)x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient finalement que pour tout $n\geq 0$,

$$L_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$