2. Mathématiques 1

2.1. Introduction

Ce sujet, composé de cinq parties, traite de théorie des nombres et utilise des outils d'analyse.

Les deux premières parties étudient la fonction de comptage π des nombres premiers. Les mathématiciens J. Hadamard et C. de La Vallée Poussin ont montré indépendamment en 1896 que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}.$$

Le problème établit un encadrement, dans le même esprit mais plus faible asymptotiquement : pour $x \geqslant 3$,

$$\frac{\ln(2)}{6}\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}.$$

Les trois dernières parties montrent d'abord un critère d'irrationalité d'un réel, puis prouvent l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de π en s'appuyant sur certaines intégrales doubles.

2.2. Analyse globale des résultats

Comme d'habitude, la plupart des candidats traite un bon nombre de questions « faciles ». Ce sujet demande d'utiliser différentes parties du cours (algèbre, analyse) ce qui a permis de montrer que les candidats ont su profiter pleinement de leurs enseignements.

Les deux premières parties utilisent principalement des techniques de majoration/minoration et quelques études de fonctions simples afin d'y parvenir. Malheureusement de nombreuses erreurs de calcul ont été commises.

Les trois dernières parties sont un peu plus techniques mais beaucoup de questions sont abordables dans la toute dernière qui n'a été que trop rarement réellement faite.

Il est à noter que, comme trop souvent ces dernières années, les copies de certains candidats se confondent avec un brouillon : ratures, abréviations inintelligibles (qui pourra dire ce que signifie TCSATP ? – réellement vu dans une copie), ordre des questions totalement anarchique, écriture à peine lisible, etc. Rappelons aux candidats qu'ils doivent d'abord être lus et compris et qu'ils doivent veiller à la qualité et à la clarté de leur copie (présentation, rédaction, précision). Il faut également éviter les fautes de français, dont d'orthographe. Ne pas respecter ces consignes, expose les candidats à un malus.

Enfin, beaucoup de candidats n'ont pas assez de rigueur dans leurs réponses. Les correcteurs attendent des points précis : des justifications du style « d'après un théorème du cours » sont insuffisantes.

2.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Avant de passer plus précisément aux différentes questions du sujet, il faut mentionner qu'une erreur s'était glissée dans la question 9. Il fallait bien sûr établir la majoration

$$\pi(n) \leqslant 4\frac{n}{\ln(n)}\,.$$

Quasiment tous les candidats ont réalisé que c'était une erreur. Par contre, l'indication donnée ($\ln(4) < 2$)) et utilisée telle quelle ne permet pas d'obtenir la constante 4, mais 5. Le jury en a bien évidemment tenu compte lors de la correction.

2.3.1. Un encadrement de la fonction π

Q1 La majoration a souvent été bien traitée. Par contre, la minoration a posé des problèmes. Beaucoup de candidats ont tenté sans succès de la montrer par récurrence. Il faut utiliser le lemme de Gauss. À noter que les correcteurs ont vu plusieurs fois $(2n)! = 2^n n!$.

Q2 Cette question nécessite une récurrence forte que peu de candidats ont vue. Attention au fait qu'un produit sans facteur vaut 1 et pas 0.

Q3 Une question facile qu'il convient de ne pas négliger : bien indiquer que p étant un entier, on a $p \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant \lfloor x \rfloor$ et que la fonction $t \mapsto 4^t$ est croissante.

Q4 Comme pour la question **Q1**, la majoration est souvent bien traitée au contraire de la minoration, qui résulte d'une simple récurrence.

Q5 Cette question, assez classique, a rarement été bien traitée.

Q6 Une question rarement faite. C'est une conséquence directe de la question précédente en utilisant le fait que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Q7 Une question facile souvent faite. Il faut bien indiquer quand même qu'un nombre premier est supérieur à 1, sinon on ne peut conclure.

Q8 Une question très souvent correctement faite.

Q9 La preuve de la majoration a posé souvent des problèmes à cause de nombreuses erreurs de calcul. Il faut se ramener à l'étude de la fonction $t \mapsto \sqrt{t} - \ln(t)$.

Q10 Beaucoup de candidats oublient de mentionner que $x \geqslant 3$ implique que $x \geqslant \lfloor x \rfloor \geqslant e$ ce qui permet d'utiliser la croissance.

Q11 Question délicate qui demande d'utiliser la question **Q6**.

Q12 Comme pour la question **Q9**, beaucoup d'erreurs de calcul. Trop de candidats donnent directement $2^n \geqslant 2n$ sans justification.

Q13 Une question facile si on la traite avec soin. Beaucoup pensent que $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. Trop de candidats n'ont pas utilisé l'indication.

2.3.2. Une majoration d'un PPCM

Q14 Une simple question d'algèbre qui demande seulement de rappeler la structure d'un sous-anneau $\mathbb{Z}$ et le fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

Q15 Une question assez mal traitée dans l'ensemble par un manque de rigueur. À noter que a divise b implique $a \leqslant b$ pour deux entiers naturels uniquement si $b \neq 0$.

Q16 Les trois valeurs demandées sont très souvent correctes. La deuxième partie de la question a été bien faite lorsqu'elle a été abordée.

Q17 Une question peu faite. Le plus simple est de montrer qu'un des termes divise l'autre puis une majoration.

Q18 Une question plutôt bien traitée dans l'ensemble.

Q19 Trop de candidats pensent que si $f(x) \sim g(x)$ alors $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ ce qui est faux (et déjà signalé dans le rapport de l'an dernier).

2.3.3. Un critère d'irrationalité

Q20 Une question très peu traitée, où il suffit d'appliquer la définition de $o(1/q_n)$ et de remarquer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Q21 L'existence de β est souvent établie mais beaucoup d'erreurs sont encore commises sur le calcul de puissances.

Q22 Ici aussi l'existence de $\zeta(2)$ est souvent établie. Plus surprenant, la deuxième partie de la question n'a pas été traitée alors qu'il suffit de mettre toutes ces fractions au même dénominateur (égal au PPCM).

Q23 Une question difficile qui a été rarement faite à part dans les bonnes copies.

2.3.4. Calcul d'une intégrale double

Q24 Une question rarement bien faite. Pourquoi s'intéresser uniquement aux points 0 et 1 (alors que c'est inutile) ? Dire : « Cette fonction est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ et dont le dénominateur ne s'annule pas (car $y < 1$). Elle est donc intégrable sur $[0,1]$ car continue sur $[0,1]$. » suffit amplement.

Q25 L'application du théorème de continuité des intégrales est souvent vue, mais la domination a trop souvent posé problème. Certains ont bien vu qu'il faut une domination locale.

Q26 Une question plutôt bien faite. Beaucoup voient le passage à la série entière et justifient plus ou moins bien l'interversion des signes $\sum$ et $\int$.

Q27 Une question facile.

Q28 Une autre question facile.

Q29 Beaucoup de candidats pensent à tort que dire « par télescopage » suffit pour répondre. D'autres préfèrent écrire la différence de deux séries divergentes…

Q30 Une question peu traitée car elle demande de se souvenir de résultats précédents.

2.3.5. Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

Q31 Une question facile si on la fait soigneusement. Encore une fois beaucoup de calculs faux sont apparus.

Q32 Beaucoup de candidats ont été impressionnés par cette question alors qu'il suffit d'évoquer la linéarité de l'intégrale.

Q33 Une question peu traitée qui demande une synthèse de quelques résultats précédents.

Q34 Une question facile à comprendre mais difficile à écrire correctement (surtout sur la fin du problème). Le fait que 0 et 1 soit racines de multiplicité n de $X^n(1-X)^n$ est rarement indiqué (lorsque la question est traitée).

Q35 Une question facile.

Q36 Une question faite correctement dans seulement deux ou trois copies. Il faut d'abord prolonger la fonction par 0 sur le bord du carré, puis calculer les dérivées partielles, montrer alors que $x = y$, puis terminer le calcul. Une question longue à faire à ce moment du problème.

Q37 Une question facile.

Q38 La majoration est facile. Peu de candidats ont noté la minoration stricte.

Q39 Il faut faire le lien avec la question **Q20**.

Q40 Une question facile si on la traite par l'absurde. Affirmer « x est irrationnel donc $\sqrt{x}$ aussi » nécessite justification.

2.4. Conclusion

Le sujet est un peu long mais quelques candidats l'ont quasiment traité en entier et de façon parfaite. Félicitations à eux.

Beaucoup de candidats ont semblé perturbé par le début du sujet. Il faut bien lire un sujet en entier pour savoir de quoi il retourne.

Comme tous les ans, nous ne saurions trop conseiller aux futurs candidats de bien travailler toutes les notions vues en cours et de bien connaître les notions de première année.

Un bon nombre de copies sont relativement difficiles à corriger à cause de l'écriture, parfois à peine déchiffrable, ou de la présentation. Nous invitons les futurs candidats à faire un effort sur ce point afin d'éviter d'être pénalisés par un malus.