

35. Fonctions convexes.
36. Primitives, équations différentielles.
37. Intégrales, primitives.
38. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
39. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
40. Exemples de modèles d'évolution.
41. Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme.
42. Différents types de raisonnement en mathématiques.
43. Exemples d'approche historique de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée.
44. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.

## 4. Analyse et commentaires : épreuves écrites

### 4.1 Première épreuve écrite

Le sujet de la première épreuve écrite est constitué de trois problèmes indépendants.

Le premier problème est un questionnaire de type Vrai – Faux avec *réponses argumentées*, abordant successivement six thématiques au programme du concours (*Calcul dans l'ensemble des réels, Arithmétique, Analyse réelle, Géométrie, Algèbre linéaire, Dénombrement-Probabilités*).

Le deuxième problème a pour objet une étude de la notion d'approximation affine d'une fonction, en un point. Le concept de meilleure approximation y est privilégié.

Le troisième problème traite du nombre de dérangements et fait donc appel à des connaissances ayant trait à la combinatoire.

Le jury note une réelle prise de conscience de l'importance de la qualité de la rédaction. Cependant, un nombre de candidats trop important rend une copie raturée, mal écrite et difficile à lire. La copie rendue doit être rédigée avec soin et sans fautes d'orthographe, être aérée et agréable à lire.

En ce qui concerne la rédaction, le jury s'attend à une maîtrise du langage mathématique, avec en particulier, des quantificateurs bien positionnés. La maîtrise des éléments de langage est un indicateur de la compréhension des objets mathématiques eux-mêmes.

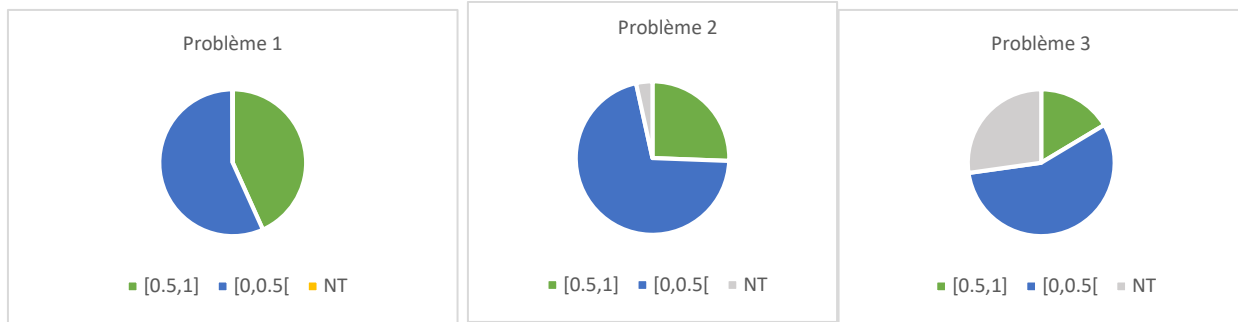
Par ailleurs les phrases du type « on voit que » ou « il est trivial » doivent s'utiliser avec parcimonie et de manière adéquate. L'utilisation des raccourcis IPP ou TVI ou encore TFA est à proscrire. Les conditions d'application de tout théorème doivent être vérifiées.

L'utilisation rigoureuse du vocabulaire est bonifiée : confondre une fonction et sa courbe représentative ou utiliser la notation « limite » sans s'être assuré de son existence est pénalisé.

Les mathématiques nécessitent des preuves et des démonstrations qui s'appuient sur des types de raisonnements : il s'agit donc qu'implication, raisonnements par contraposé ou par l'absurde soient maîtrisés.

Le jury note que certains candidats optent pour des raisonnements inhabituels, agréables à lire, qui le conforte dans les capacités d'adaptation et de réflexion de ces candidats.

Pour pouvoir comparer les résultats des candidats sur les trois problèmes nous avons ramené à 1 leurs notes respectives. On obtient le graphique ci-après, qui donne le pourcentage de réussite des trois problèmes.



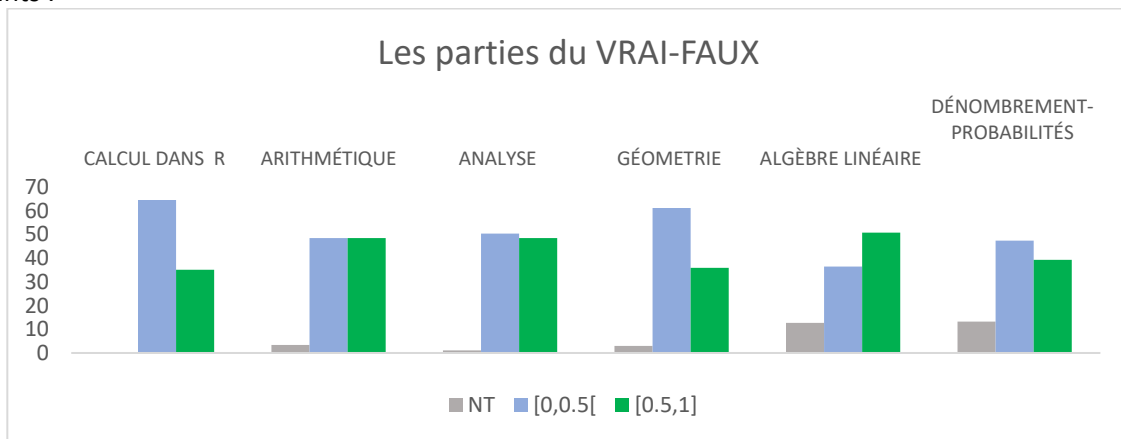
Nous pouvons alors remarquer que le problème 1 a toujours été abordé. Rappelons aux candidats que les problèmes sont en général indépendants et qu'il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre de leur numérotation.

### PROBLEME 1 (vrai-faux)

Le problème vise à évaluer à la fois les connaissances des candidats sur des notions élémentaires et leur capacité à rédiger un argumentaire convaincant. Il s'agit de répondre et d'argumenter chaque réponse ; dans le cas contraire, aucun point n'est attribué à la question.

Le jury s'étonne de voir des candidats en difficulté pour répondre à des questions simples et réussir des questions a priori plus compliquées. Cela témoigne sans doute du sérieux des candidats dans leurs apprentissages, mais d'un manque de recul et de compréhension en profondeur des notions manipulées.

En ramenant les notes de chacune des parties du problème à 1 on obtient les pourcentages de réussite suivants :



### Calculs dans R

Au moins une question, parmi les quatre proposées dans cette partie, a été traitée par chacun des candidats.

Le jury attire l'attention sur le fait que la négation d'une implication n'est pas une implication et que l'implication est au cœur des raisonnements mathématiques (question 3).

Au sujet de la question 4, la résolution des équations trigonométriques semble être un point délicat et la notion de fonction réciproque est mal utilisée. Il convient de rappeler ici que la fonction arccosinus n'est pas la réciproque de la fonction cosinus sur l'ensemble des réels.

## Arithmétique

La propriété d'injectivité d'une application d'un ensemble vers un autre, n'intervient pas uniquement en algèbre linéaire comme semble le penser un bon nombre de candidat et n'est pas à confondre avec celle de surjectivité. Par ailleurs, il s'agit d'utiliser les concepts dans le cadre où ils sont bien définis : par exemple on ne peut pas dériver une fonction à variable réelle dans l'ensemble des entiers naturels.

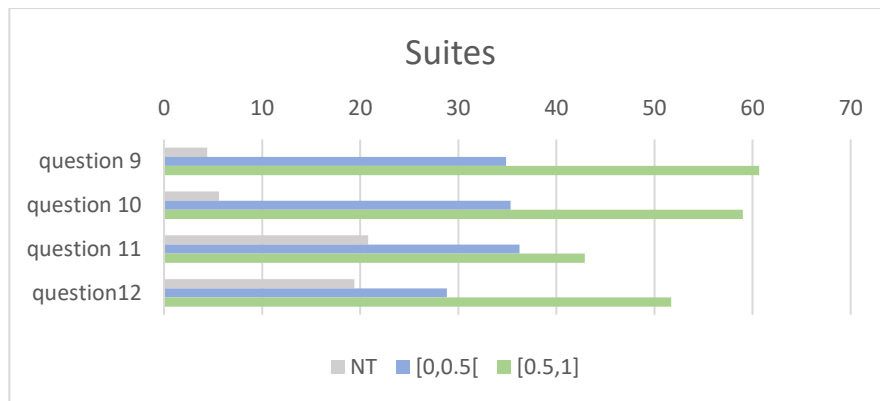
Le lien entre congruence et divisibilité semble être maîtrisé par les candidats et la notion de contre-exemple utilisée à bon escient. Si la démonstration par récurrence est souvent bien menée sur les deux premières étapes, il s'agit de ne pas oublier la troisième qui est de conclure.

## Analyse

Pour cette partie, nous proposons une étude plus quantitative en détaillant les résultats des candidats sur les deux thèmes principaux : suites et intégration.

Pour les questions excluant ces deux thèmes, le jury note encore trop de confusions entre une fonction et ses valeurs ( $f$  et  $f(x)$ ), ou des énoncés de propriétés classiques faux (toute fonction continue est dérivable).

En ramenant les notes de chacune des questions portant sur *les suites* (dont les énoncés sont rappelés sous le graphique ci-après) à 1, on obtient les pourcentages de réussite suivants :

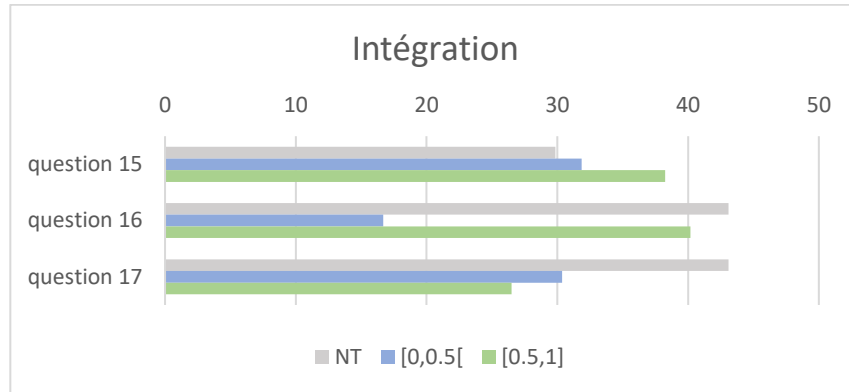


- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = -3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = -4 u_n$ .  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ .  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'admet pas de limite.
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels admettant une limite finie strictement positive.  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive à partir d'un certain rang.
- Soit  $f$  une fonction définie et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
Soit  $u_0$  un réel et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de premier terme  $u_0$  et telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.

Les questions sont globalement réussies et l'analyse des réponses permet de comprendre que les fragilités présentes le sont sur le sens même de la notion de limite : même si la définition est écrite tout à fait correctement (question 11) et que des contre-exemples sont bien trouvés (question 12), certains

candidats pensent qu'une suite alternée ne peut pas avoir une limite finie (question 10). Certaines copies contiennent également des maladroresses qui dénotent un manque de rigueur préjudiciable.

En ramenant les notes de chacune des questions portant sur l'intégration (dont les énoncés sont rappelés sous le graphique ci-après) à 1, on obtient les pourcentages de réussite suivants :



15. Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \int_0^x e^{-t} dt$ .  
La fonction  $f$  est bornée sur  $[0; +\infty[$ .

16. Soit  $(I_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ .  
La suite  $(I_n)$  est croissante.

17. Soit  $(I_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ .  
Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2 + (n+1)I_n)$ .

La manipulation des intégrales par les candidats dénote un manque de rigueur de ces derniers : l'existence des intégrales manipulées se doit d'être vérifiée et les propriétés calculatoires utilisées à bon escient avec leurs conditions d'application justifiées.

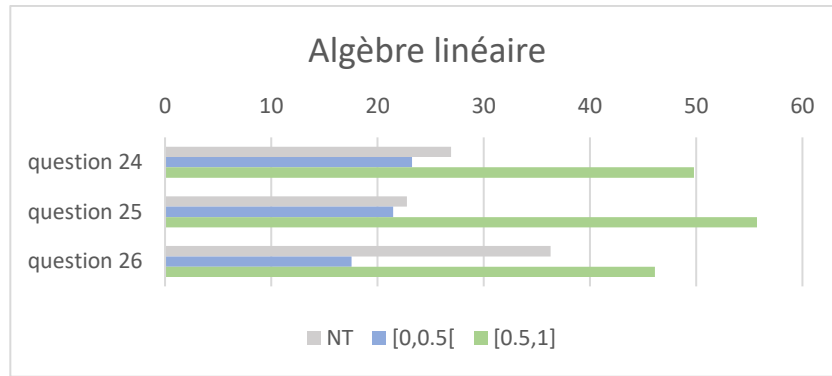
Une forte proportion de candidats n'a pas traité cette partie. Rappelons que l'intégration fait partie des programmes du secondaire et doit être à la portée d'un futur professeur de mathématiques.

### Géométrie

Le jury note sur cette partie, des réussites en géométrie plane. En particulier les questions 18 et 19 sont bien traitées dans la majorité des cas, les calculs bien menés et les justifications correctes. Les quelques erreurs relevées portent sur les conditions d'application de formules ou de théorèmes (théorème de Pythagore par exemple). On note également des confusions entre implication et équivalence. La géométrie dans l'espace est peu abordée. Nous signalons aux candidats que la géométrie dans l'espace est présente dans les programmes de lycée et de collège et qu'il s'agit de maîtriser ce thème.

### Algèbre linéaire

En ramenant les notes de chacune des trois questions portant sur l'algèbre linéaire (dont les énoncés sont rappelés sous le graphique ci-après) à 1, on obtient les pourcentages de réussite suivants :



24. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée notée  $\| \cdot \|$ . Deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .
25. On considère la matrice  $A$  de  $M_2(\mathbb{C})$ , définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le produit des valeurs propres de  $A$  est égal à 2.
26. On considère une matrice carrée  $A$  de taille  $n$  diagonalisable ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). La matrice  $A^2$  est diagonalisable.

Dans la question 24, le jury remarque que certains candidats ont considéré uniquement le cas où  $E$  est le plan euclidien et dans la question 26, des omissions du fait de préciser que le carré d'une matrice diagonale est lui-même diagonal.

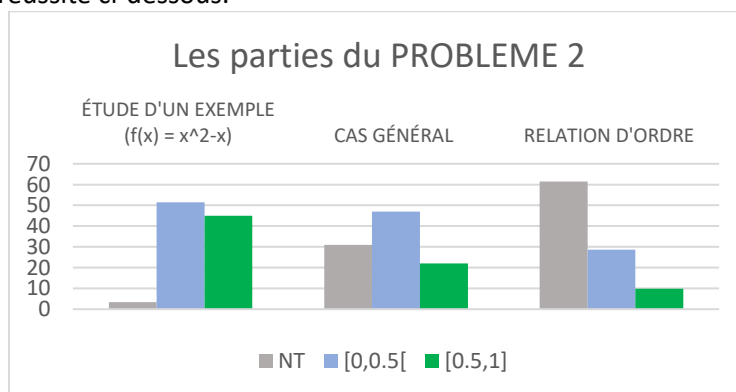
### Dénombrement et probabilités

Les réponses des candidats à ces questions sont plutôt réussies. Néanmoins le jury note des maladresses et des confusions au niveau du vocabulaire (confusion entre évènement et probabilité). Il souligne aussi que les réponses à la question sur l'algorithme manquent parfois de clarté, même si les arguments sont présents.

### PROBLEME 2 (Meilleure approximation affine)

L'objet de ce problème est une étude de la notion de meilleure approximation affine d'une fonction en un point. Il est divisé en trois parties. La première consiste en l'étude d'un exemple, puis dans la deuxième, on traite le cas général d'une fonction dérivable sur un intervalle donné. Enfin la troisième partie s'intéresse à la relation « être la meilleure approximation affine que » et on cherche à savoir s'il s'agit d'une relation d'ordre.

De même que dans le problème 1, nous avons ramené les notes de chacune des parties sur 1 et obtenu les pourcentages de réussite ci-dessous.



Dans la troisième partie, trop peu de candidats connaissent la définition exacte de relation d'ordre et c'est sans doute pourquoi elle n'a été que rarement abordée. Lorsque c'est le cas, la propriété d'antisymétrie n'est pas maîtrisée.

Pour le cas général il est attendu que le candidat fasse le lien entre les notions de limite et de dérivée à travers la définition de nombre dérivé ; les réponses données sont insuffisantes et prouvent que ce lien n'est pas exploité.

La première partie porte sur la meilleure approximation affine pour la fonction  $f: x \rightarrow x^2 - x$ .

Les premières questions proposent de tracer des représentations. Le jury souligne la nécessité d'être rigoureux pour obtenir les tracés demandés, même s'il s'agit d'allures de courbes. Il retrouve ici, dans les réponses proposées par les candidats, la confusion entre fonction, graphe et image.

Nous proposons de nous focaliser sur les questions 4 et 5 suivantes :

4. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = -\frac{1}{2}x.$$

4.1 Justifier que  $h$  est une approximation affine de  $f$  en 0. Tracer la courbe représentative de  $h$  sur la même figure.

4.2 Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)| \Leftrightarrow |x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

4.3 En déduire que  $t$  est une meilleure approximation affine de  $f$  en 0 que  $h$ .

5. Pour tout réel  $k \neq -1$ , on note  $g_k$  la fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g_k(x) = kx.$$

5.1 Justifier que  $g_k$  est une approximation affine de  $f$  en 0.

5.2 Démontrer que

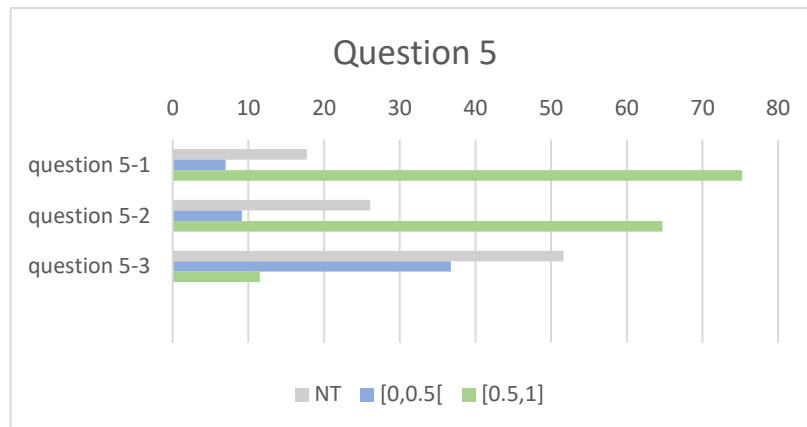
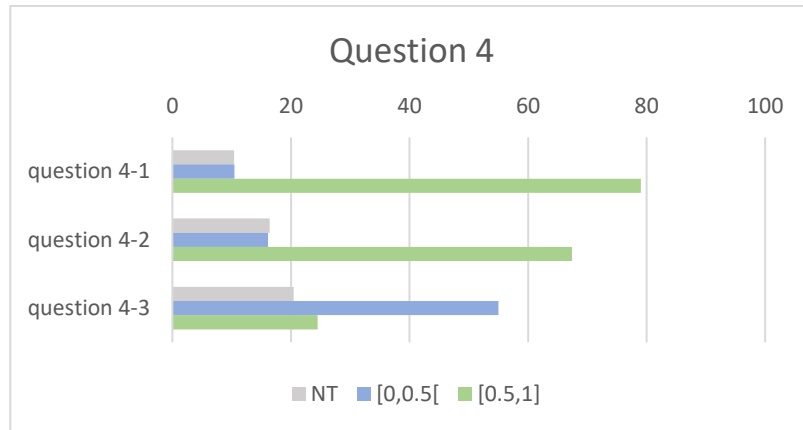
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_k(x)| \Leftrightarrow |x| \leq |x - (1+k)|.$$

5.3 Démontrer que

$$\forall x \in ]-\left|\frac{1+k}{2}\right|, \left|\frac{1+k}{2}\right|[, |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g_k(x)|.$$

Ces questions comportent des justifications. Il s'agit de bien vérifier les conditions même si certaines semblent triviales. La question 5. est en grande partie une généralisation de la question 4. et se traite de la même façon.

Au vu des résultats graphiques obtenus ci-dessous, le nombre de candidats n'ayant pas traité la question 5-3, étant en forte augmentation par rapport à la question 4-3, on peut imaginer que l'introduction de la généralisation a été un frein pour certains candidats.



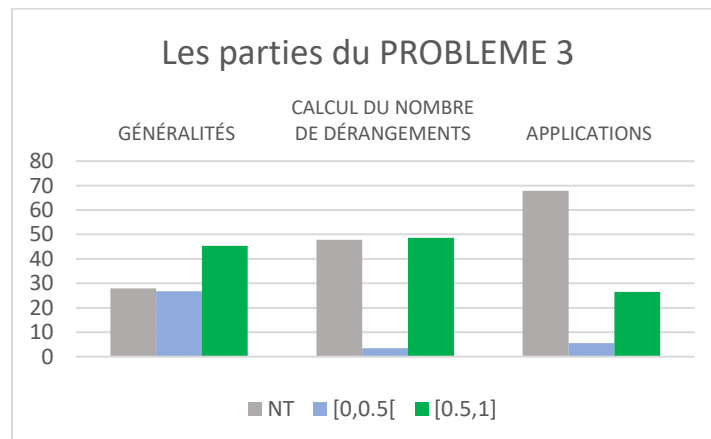
### PROBLEME 3 (Dérangements)

Ce problème a pour objet la détermination du nombre de dérangements d'un ensemble fini.

Une première partie permet d'introduire des résultats sur les cardinaux d'unions d'ensembles finis. Ces résultats sont utiles pour la partie 2, qui se focalise sur le calcul du nombre de dérangements. Enfin une dernière partie permet de relier la notion de dérangement avec une expérience aléatoire.

Ce problème a été abordé (au moins sur une question) par 70% des candidats, mais seulement 16% obtient une note supérieure à la moitié des points attribués.

Pour comparer, les différentes parties nous avons ramené les notes de chacune des parties du problème sur 1 et obtenu les pourcentages de réussite ci-dessous.



Si nous nous focalisons sur la partie 2 de ce problème, et faisons abstraction des candidats qui n'ont pas traité ces questions, les réponses proposées sont très pertinentes.

Ci-dessous un rappel d'une partie du sujet et un graphique montrant les réussites à ces questions.

Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $E_n$  le sous ensemble de  $\mathbb{N}$  défini par  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

On appelle permutation de  $E_n$  toute bijection de  $E_n$  dans lui-même. Soit  $\sigma$  une permutation de  $E_n$  et  $i$  un élément de  $E_n$ . Dire que  $i$  est un point fixe de  $\sigma$  signifie que  $\sigma(i) = i$ .

On appelle *dérangement* de  $E_n$  une permutation de  $E_n$  n'ayant aucun point fixe.

On note  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $E_n$ .

On rappelle que le cardinal de  $S_n$  est  $n!$ .

On note  $D_n$  l'ensemble des dérangements de  $E_n$ .

Le cardinal de  $D_n$  est noté  $d_n$ .

Pour tout entier  $i$  élément de  $E_n$ , on note  $A_i$  l'ensemble des permutations admettant au moins  $i$  pour point fixe.

$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

5. Démontrer que

$$S_n \setminus D_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

6. Étant donné un entier  $k$  de  $E_n$  et  $k$  entiers deux à deux distincts  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , justifier l'égalité

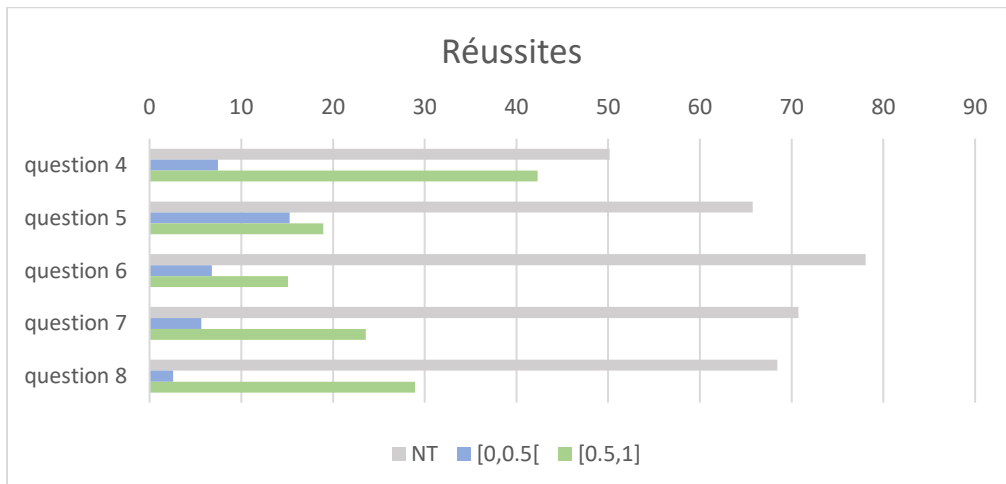
$$\text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!$$

7. Dédurre des deux questions précédentes et de la formule du crible que

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)!$$

8. Démontrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$



La question 4. consiste en le calcul du nombre de dérangements pour un ensemble à un ou deux éléments. Le jury souligne que la définition de permutation et de dérangement est bien comprise par les candidats qui ont traité cette partie. Il note des difficultés dans la gestion des indices, mais les candidats qui ont traité ces questions en ont globalement compris la finalité.