

## Notations

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

Pour  $i$  et  $j$  deux entiers naturels tels que  $i \leq j$ ,  $[[i, j]]$  désigne l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $i \leq k \leq j$ .

Pour  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq k \leq n$ , on note  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial  $k$  parmi  $n$ .

On désigne par  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On se place dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $\vec{\mathcal{P}}$  le plan vectoriel dirigeant  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{B}$  la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\vec{\mathcal{P}}$ , on note  $\|\vec{u}\|$  sa norme euclidienne.

## Définitions

Un point pondéré est un couple  $(M, \alpha)$ , où  $M$  est un point de  $\mathcal{P}$  et  $\alpha$  un nombre réel.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, un système de  $n + 1$  points pondérés est un  $(n + 1)$ -uplet  $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$ . Le poids total de ce système de points pondérés est

$$\alpha = \sum_{k=0}^n \alpha_k.$$

# Partie A : barycentres

## I. Existence et caractérisation

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$  un système de  $n + 1$  points pondérés de poids total  $\alpha$ .

1. On note  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\vec{\mathcal{P}}$  qui, à tout **point**  $M$  de  $\mathcal{P}$  associe le **vecteur**

$$f(M) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MP_i}.$$

a. Soient  $M$  et  $N$  deux points de  $\mathcal{P}$ . Démontrer l'égalité vectorielle

$$f(N) = f(M) + \alpha \overrightarrow{NM}.$$

Pour tous  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{P}$ , on a

$$\begin{aligned} f(N) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{NP_i} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP_i}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{NM} + \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{NM} + f(M). \end{aligned}$$

b. Démontrer que, si  $\alpha \neq 0$ , alors  $f$  est injective et surjective.

Pour  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{P}$ , comme  $\alpha \neq 0$ , on a d'après **a.** :

$$f(M) = f(N) \iff \alpha \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0} \iff M = N$$

et donc  $f$  est injective.

Montrons que  $f$  est surjective. Soit  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ . On cherche à montrer qu'il existe  $M \in \mathcal{P}$  tel que  $\vec{u} = f(M)$ . En supposant que  $M$  existe, on a  $f(O) = \alpha \overrightarrow{OM} + \vec{u}$ , ce qui équivaut, comme  $\alpha \neq 0$ , à

$$\overrightarrow{OM} = \frac{f(O) - \vec{u}}{\alpha}.$$

Soit donc le point  $M$  défini par  $\overrightarrow{OM} = \frac{f(O) - \vec{u}}{\alpha}$ . On vérifie que  $M$  convient :

$$f(M) = \alpha \overrightarrow{MO} + f(O) = \alpha \overrightarrow{MO} + \alpha \overrightarrow{OM} + \vec{u} = \vec{u}.$$

c. En déduire que  $f$  est bijective si et seulement si  $\alpha \neq 0$ .

On vient de montrer que si  $\alpha \neq 0$ , alors  $f$  est bijective. Pour la réciproque, raisonnons par contraposition : supposons  $\alpha = 0$  et montrons que  $f$  n'est pas bijective. On tire alors de **a.** que pour tous  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{P}$  (et en particulier pour  $M \neq N$ ), on a  $f(M) = f(N)$ . La fonction  $f$ , constante, n'est donc ni injective, ni surjective.

2. On suppose  $\alpha$  non nul. Montrer qu'il existe un unique point  $G$  tel que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point  $G$  est appelé barycentre du système de points pondérés  $((P_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$ . On note

$$G = \text{bar}((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n)).$$

L'égalité  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$  équivaut à  $f(G) = \overrightarrow{0}$ . Or, comme  $\alpha \neq 0$ ,  $f$  est bijective

d'après **1.c.** et en particulier  $\overrightarrow{0}$  a un unique antécédent par  $f$ . Autrement dit, il existe un unique point  $G$  tel que  $f(G) = \overrightarrow{0}$ .

3. On suppose que  $\alpha \neq 0$  et on note  $G$  le barycentre du système  $((P_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$ . Montrer que, pour tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ ,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

Pour tout  $M \in \mathcal{P}$ , on a

$$f(M) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG} + f(G) = \alpha \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{0} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

## II. Barycentre de deux points

Soient  $P_0, P_1$  deux points distincts du plan  $\mathcal{P}$ .

1. Quel est le barycentre du système de points pondérés  $((P_0, 1), (P_1, 1))$  ?  
D'après **I.3.** appliqué avec  $M = P_0$ , et en notant  $G = \text{bar}((P_0, 1), (P_1, 1))$ , on a  $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\overrightarrow{P_0G}$  et donc  $\overrightarrow{P_0G} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}$ , ce qui signifie que  $G$  est le milieu du segment  $[P_0P_1]$ .
2. Démontrer que, pour tout nombre réel  $t$ , le barycentre du système de points pondérés  $((P_0, t), (P_1, 1-t))$  appartient à la droite  $(P_0P_1)$ .  
Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $G = \text{bar}((P_0, t), (P_1, 1-t))$ . D'après **I.3.** appliqué avec  $M = P_1$ , et comme  $t + (1-t) = 1$ , on a  $t\overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1G}$ . Ainsi  $\overrightarrow{P_1G}$  et  $\overrightarrow{P_1P_0}$  sont colinéaires et  $G$  appartient à la droite  $(P_0P_1)$ .
3. Soit  $M$  un point de la droite  $(P_0P_1)$ .

- a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel  $t$  tel que  $M$  soit le barycentre du système de points pondérés  $((P_0, t), (P_1, 1-t))$ .

Comme  $M$  appartient à la droite  $(P_0P_1)$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{P_1M} = t\overrightarrow{P_1P_0}$ .  
On en déduit alors, en écrivant  $\overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_0}$  :

$$(1-t)\overrightarrow{P_1M} + t\overrightarrow{P_0M} = \vec{0},$$

ce qui caractérise  $M = \text{bar}((P_0, t), (P_1, 1-t))$ .

Si  $M = \text{bar}((P_0, t), (P_1, 1-t))$  et  $M = \text{bar}((P_0, t'), (P_1, 1-t'))$ , alors on a  $\overrightarrow{P_1M} = t\overrightarrow{P_1P_0}$  et  $\overrightarrow{P_1M} = t'\overrightarrow{P_1P_0}$  et donc  $(t-t')\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{0}$ . Comme  $\overrightarrow{P_1P_0} \neq \vec{0}$  (car  $P_0 \neq P_1$ ), on a  $t = t'$ , d'où l'unicité de  $t$ .

- b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $t$  pour que  $M$  soit un point du segment  $[P_0P_1]$ .

$M$  appartient au segment  $[P_0P_1]$

$$\iff \text{il existe } t \in [0; 1] \text{ tel que } \overrightarrow{P_0M} = t\overrightarrow{P_0P_1}$$

$$\iff \text{il existe } t \in [0; 1] \text{ tel que } (1-t)\overrightarrow{P_0M} + t\overrightarrow{P_1M} = \vec{0}$$

$$\iff \text{il existe } t \in [0; 1] \text{ tel que } M = \text{bar}((P_0, 1-t), (P_1, t))$$

$$\iff \text{il existe } t' \in [0; 1] \text{ tel que } M = \text{bar}((P_0, t'), (P_1, 1-t'))$$

### III. Propriétés du barycentre

#### 1. Homogénéité

- a. Soit  $\lambda$  un réel non nul. Montrer que le barycentre du système de points pondérés  $((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \dots, (P_n, \lambda\alpha_n))$ , de poids total supposé non nul, est égal au barycentre du système de points pondérés  $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \dots, (P_n, \alpha_n))$ .

Soit  $\lambda$  un réel non nul. Notons  $G = \text{bar}((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \dots, (P_n, \lambda\alpha_n))$ .

Par définition, on a alors  $\sum_{i=0}^n \lambda\alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$ , puis  $\lambda \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$ , et donc,

comme  $\lambda \neq 0$ , on en tire  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$ , ce qui caractérise le fait d'avoir aussi  $G = \text{bar}((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \dots, (P_n, \alpha_n))$ .

- b. Soient trois points  $P_0, P_1, P_2$  formant un triangle non aplati du plan  $\mathcal{P}$ . On suppose qu'il existe deux triplets  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$  de nombres réels, chacun de somme non nulle, tels que les barycentres des systèmes  $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2))$  et  $((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2))$  soient égaux. On note alors  $M$  ce point.

Démontrer que  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$  sont proportionnels.

*Indication* : on pourra justifier que  $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$  est une base de l'espace vectoriel  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  et décomposer le vecteur  $\overrightarrow{P_0M}$  dans cette base de deux façons différentes.

Notons

$$M = \text{bar}((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2)) = \text{bar}((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2))$$

et  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha' = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2$ .

Remarquons d'abord que  $P_0P_1P_2$  étant un triangle non aplati, les points  $P_0, P_1, P_2$  sont deux à deux distincts et sont non alignés. Ainsi les vecteurs  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_0P_2}$  sont non nuls et non colinéaires, ce qui implique que la famille  $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$  est libre dans  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ . Comme  $\overrightarrow{\mathcal{P}}$  est un espace vectoriel de dimension 2, cette famille libre de deux vecteurs en est une base, notons-la  $\mathcal{B}$ . D'après **I. 3.**, on a

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{1}{\alpha} \left( \alpha_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0P_2} \right),$$

et de même

$$\overrightarrow{P_0M} = \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha'_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \alpha'_2 \overrightarrow{P_0P_2} \right).$$

Par unicité d'écriture d'un vecteur dans la base  $\mathcal{B}$ , on en tire  $\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\alpha'_1}{\alpha'}$  et  $\frac{\alpha_2}{\alpha} = \frac{\alpha'_2}{\alpha'}$ . Ainsi, en notant  $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$ , on a  $\alpha'_1 = \lambda\alpha_1$  et  $\alpha'_2 = \lambda\alpha_2$ . Enfin  $\alpha'_0 = \alpha' - \alpha'_1 - \alpha'_2 = \lambda(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) = \lambda\alpha_0$ . Les triplets  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$  sont donc proportionnels.

## 2. Associativité simple

- a. *Un cas particulier.*

Étant donnés trois points  $A, B, C$  du plan  $\mathcal{P}$  et trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $\alpha + \beta \neq 0$ , on note  $m_1 = \alpha + \beta$  et  $G_1$  le barycentre du système  $((A, \alpha), (B, \beta))$ .

- i. Démontrer que le barycentre du système  $((G_1, m_1), (C, \gamma))$  est égal au barycentre du système  $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ .

Notons  $G = \text{bar}((G_1, m_1), (C, \gamma))$ . Par définition on a

$$m_1 \overrightarrow{G_1G} + \gamma \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

et d'après **I. 3.** appliqué avec  $M = G$ , et sachant que  $m_1 = \alpha + \beta$ , on a aussi

$$m_1 \overrightarrow{GG_1} = \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB},$$

de sorte que finalement  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ . On en tire que  $G = \text{bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ .

- ii. En utilisant ce résultat, démontrer que les trois médianes d'un triangle non aplati sont concourantes en un point situé aux deux tiers de chacune à compter du sommet associé.

Considérons un triangle non aplati  $ABC$ ,  $A', B', C'$  les milieux respectifs des côtés  $[BC]$ ,  $[CA]$ ,  $[AB]$ . Notons  $G = \text{bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1))$ . D'après **II.1.**, on a  $\text{bar}((A, 1), (B, 1)) = C'$ , puis **i.** implique  $G = \text{bar}((C', 2), (C, 1))$ , qu'on peut aussi écrire, avec **III.1.a.**,  $G = \text{bar}\left(\left(C', \frac{2}{3}\right), \left(C, \frac{1}{3}\right)\right)$ . **II.2.** entraîne alors que  $G$  appartient à la médiane  $(CC')$  et **I.3.** que  $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ .

On montre de même, en introduisant  $A'$  ou  $B'$  selon le cas, que  $G$  appartient aux deux autres médianes  $(AA')$  et  $(BB')$ , situé aux deux tiers de chacune en partant du sommet  $A$  ou  $B$ .

Montrons enfin que  $G$  est le seul point commun aux trois médianes («concourantes») : On a déjà  $\{G\} \subset (AA') \cap (BB') \cap (CC')$ . Comme une intersection non vide de droites ne peut être qu'un singleton ou une droite, si  $(AA') \cap (BB') \cap (CC')$  contenait plus que  $G$ , alors cette intersection serait une droite (contenue à la fois dans  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$ ), qui serait dans ce cas à la fois égale à  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$ . On aurait ainsi  $(AA') = (BB') = (CC')$  et en particulier  $A, B, C$  serait alignés et donc  $ABC$  aplati. C'est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. On en conclut que  $\{G\} = (AA') \cap (BB') \cap (CC')$ .

b. *Cas général.*

Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $I = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $r$  un entier naturel non nul inférieur ou égal à  $n$ . On suppose que  $I = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_r$ , les  $J_k$  ( $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ) étant non vides et deux à deux disjoints. On considère un système de points pondérés  $((P_i, \alpha_i) ; i \in I)$  avec  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \neq 0$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , on suppose que  $\beta_k = \sum_{i \in J_k} \alpha_i \neq 0$  et on note  $Q_k$  le barycentre du système  $((P_i, \alpha_i) ; i \in J_k)$ .

Démontrer que  $\sum_{k=0}^r \beta_k \neq 0$  et que

$$\text{bar}((P_i, \alpha_i) ; i \in \llbracket 0, n \rrbracket) = \text{bar}((Q_k, \beta_k) ; k \in \llbracket 0, r \rrbracket).$$

Comme les  $J_k$  sont deux à deux disjoints et de réunion égale à  $I$ , on a

$$\sum_{k=0}^r \beta_k = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{i \in J_k} \alpha_i \right) = \sum_{i \in J_0 \cup \dots \cup J_r} \alpha_i = \sum_{i \in I} \alpha_i,$$

qui est non nul par hypothèse.

Notons  $G = \text{bar}((Q_k, \beta_k) ; k \in \llbracket 0, r \rrbracket)$ . Par définition on a

$$\sum_{k=0}^r \beta_k \overrightarrow{GQ_k} = \vec{0}. \quad (1)$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , d'après **I.3.** appliqué avec  $M = G$ , on a  $\beta_k \overrightarrow{GQ_k} = \sum_{i \in J_k} \alpha_i \overrightarrow{GP_i}$ . On en tire, en réinjectant ces égalités dans (1) :

$$\sum_{k=0}^r \left( \sum_{i \in J_k} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} \right) = \vec{0},$$

soit encore  $\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$ , et donc  $G = \text{bar}((P_i, \alpha_i) ; i \in \llbracket 0, n \rrbracket)$ .

### 3. Associativité double

On considère deux entiers naturels  $p$  et  $n$ , un  $n + 1$ -uplet  $(P_0, \dots, P_n)$  de points de  $\mathcal{P}$  et deux familles finies de réels  $(\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq n}}$  et  $(\beta_i)_{0 \leq i \leq p}$  vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} = 1 \text{ et } \sum_{i=0}^p \beta_i = 1.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on note  $B_i$  le barycentre du système de points pondérés  $((P_j, \alpha_{i,j}) ; j \in \llbracket 0, n \rrbracket)$  et on note  $G$  le barycentre du système de points pondérés  $((B_i, \beta_i) ; i \in \llbracket 0, p \rrbracket)$ .

Démontrer que  $\sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) = 1$  et que  $G$  est le barycentre du système de points pondérés  $\left( \left( P_j, \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) ; j \in \llbracket 0, n \rrbracket \right)$ .

Les deux sommations ne contenant qu'un nombre fini de termes et étant indexées de manière indépendante, on peut les échanger :

$$\sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^p \left( \sum_{j=0}^n \beta_i \alpha_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^p \beta_i \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} \right),$$

puis, comme pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$  on a  $\sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} = 1$  et  $\sum_{i=0}^p \beta_i = 1$ , on peut continuer :

$$\sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^p \beta_i \times 1 = 1.$$

Par définition on a

$$\sum_{i=0}^p \beta_i \overrightarrow{GB_i} = \overrightarrow{0}. \quad (2)$$

Pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , d'après **I.3.** appliqué avec  $M = G$ , on a  $\left( \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} \right) \overrightarrow{GB_i} = \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} \overrightarrow{GP_j}$ , et donc, comme  $\sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} = 1$  :  $\overrightarrow{GB_i} = \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} \overrightarrow{GP_j}$ . On en tire, en réinjectant ces égalités dans (2) :

$$\sum_{i=0}^p \beta_i \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} \overrightarrow{GP_j} \right) = \overrightarrow{0},$$

soit encore, en échangeant les deux sommes :  $\sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) \overrightarrow{GP_j} = \overrightarrow{0}$ , et donc

$$G = \text{bar} \left( \left( \left( P_j, \sum_{i=0}^p \beta_i \alpha_{i,j} \right) ; j \in \llbracket 0, n \rrbracket \right) \right).$$

#### IV. Barycentres et applications affines

Soit  $g$  une application affine de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ . On rappelle que sa partie linéaire  $\varphi_g$  est l'unique endomorphisme de  $\vec{\mathcal{P}}$  tel que, pour tous points  $A, B$  de  $\mathcal{P}$ ,

$$\overrightarrow{g(A)g(B)} = \varphi_g(\overrightarrow{AB}).$$

Soit  $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$  un système de points pondérés de poids total non nul.

Démontrer que l'image par  $g$  du barycentre du système  $((P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n))$  est le barycentre du système de points pondérés  $((g(P_0), \alpha_0), \dots, (g(P_n), \alpha_n))$ .

Notons  $G = \text{bar}(P_0, \alpha_0), \dots, (P_n, \alpha_n)$ , de sorte qu'on a  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$ . En appliquant  $\varphi_g$  à cette égalité vectorielle, on en tire, par linéarité de  $\varphi_g$  :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_g(\overrightarrow{GP_i}) = \varphi_g(\vec{0}) = \vec{0},$$

puis, avec le rappel de l'énoncé,  $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{g(G)g(P_i)} = \vec{0}$ . On en déduit  $g(G) = \text{bar}((g(P_0), \alpha_0), \dots, (g(P_n), \alpha_n))$ .

## Partie B : polynômes de Bernstein

### Définition

Pour tout entier naturel  $n$  et tout entier  $k$  de l'intervalle  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on appelle  $k$ -ième polynôme de Bernstein de degré  $n$  le polynôme

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

### V. Propriétés des polynômes de Bernstein

#### 1. Valeurs en 0 et en 1

Démontrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, & & B_{n,0}(0) &= B_{n,n}(1) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, & & B_{n,k}(0) &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, & & B_{n,k}(1) &= 0. \end{aligned}$$

$B_{n,0}(X) = (1-X)^n$  et  $B_{n,n}(X) = X^n$  et donc  $B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1$ .

$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$  donc, si  $1 \leq k \leq n$ , le facteur  $X$  apparaît au moins une fois dans  $B_{n,k}$  et donc  $B_{n,k}(0) = 0$ .

De même si  $0 \leq k \leq n-1$ , alors  $n-k \geq 1$  et le facteur  $(1-X)$  apparaît au moins une fois dans  $B_{n,k}$  et donc  $B_{n,k}(1) = 0$ .

#### 2. Positivité

Démontrer que, pour tout nombre réel  $t$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$B_{n,k}(t) \geq 0.$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $t^k \geq 0$  et  $(1-t)^{n-k} \geq 0$  (et  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ ) donc  $B_{n,k}(t) \geq 0$ .

### 3. Symétrie

Démontrer que, pour tout nombre réel  $t$ , tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t).$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$B_{n,n-k}(1-t) = \binom{n}{n-k} (1-t)^{n-k} t^{n-(n-k)}$$

et par la propriété de symétrie  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ , on obtient  $B_{n,n-k}(1-t) = B_{n,k}(t)$ .

### 4. Partition de l'unité

Démontrer que, pour tout nombre réel  $t$  et tout entier naturel  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) = 1.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a, grâce à la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1.$$

### 5. Relations de récurrence

a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 et tout nombre réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} B_{n,0}(t) &= (1-t)B_{n-1,0}(t), \\ B_{n,n}(t) &= tB_{n-1,n-1}(t). \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout nombre réel  $t$ , on a  $B_{n,0}(t) = (1-t)^n$  et  $B_{n,n}(t) = t^n$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout nombre réel  $t$ , on a bien

$$B_{n,0}(t) = (1-t)B_{n-1,0}(t) \text{ et } B_{n,n}(t) = tB_{n-1,n-1}(t).$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, tout entier naturel  $k$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et tout nombre réel  $t$ ,

$$B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} &(1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t) \\ &= (1-t) \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} + t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \left( \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= B_{n,k}(t) \end{aligned}$$

grâce à la formule du triangle de Pascal.



## VI. Dérivabilité et maximum

Dans cette question,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

- Justifier que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $B_{n,k}$  est dérivable et démontrer les égalités suivantes, valables pour tout nombre réel  $t$  :

$$\begin{aligned} B'_{n,0}(t) &= -nB_{n-1,0}(t), \\ B'_{n,n}(t) &= nB_{n-1,n-1}(t), \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad B'_{n,k}(t) &= n(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t)). \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $B_{n,k}$  est dérivable comme produit de fonctions polynômiales donc dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $B_{n,0}(t) = (1-t)^n$  et  $B_{n,n}(t) = t^n$ , on a

$$B'_{n,0}(t) = -n(1-t)^{n-1} = -nB_{n-1,0}(t) \text{ et } B'_{n,n}(t) = nt^{n-1} = nB_{n-1,n-1}(t).$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a

$$B'_{n,k}(t) = k \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k-1}. \quad (3)$$

Or  $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$  et de même  $(n-k) \binom{n}{k} = (n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = n \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n \binom{n-1}{k}$ . On en déduit que (3) se réécrit  $B'_{n,k}(t) = n(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t))$ .

- Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$B'_{n,k}(0) = \begin{cases} -n & \text{si } k = 0, \\ n & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \quad B'_{n,k}(1) = \begin{cases} n & \text{si } k = n, \\ -n & \text{si } k = n-1, \\ 0 & \text{si } k \leq n-2. \end{cases}$$

On utilise les résultats obtenus en **V.1.** et **VI.1** :

$$B'_{n,k}(0) = \begin{cases} -nB_{n-1,0}(0) = -n & \text{si } k = 0, \\ n(B_{n-1,0}(0) - B_{n-1,1}(0)) = n(1-0) = n & \text{si } k = 1, \\ n(B_{n-1,k-1}(0) - B_{n-1,k}(0)) = n(0-0) = 0 & \text{si } 2 \leq k \leq n-1, \\ nB_{n-1,n-1}(0) = n \times 0 = 0 & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$B'_{n,k}(1) = \begin{cases} nB_{n-1,n-1}(1) = n \times 1 = n & \text{si } k = n, \\ n(B_{n-1,n-2}(1) - B_{n-1,n-1}(1)) = n(0-1) = -n & \text{si } k = n-1, \\ n(B_{n-1,k-1}(1) - B_{n-1,k}(1)) = n(0-0) = 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n-2, \\ -nB_{n-1,0}(1) = -n \times 0 = 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

- Soit  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Démontrer que la fonction, qui à tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$  associe  $B_{n,k}(t)$ , admet un unique maximum, atteint en  $\frac{k}{n}$ . Donner la valeur de ce maximum.

Si  $k = 0$  :

$B_{n,0}(t) = (1-t)^n$  et donc  $B_{n,0}$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et admet un

unique maximum, atteint en  $t = 0 = \frac{k}{n}$  et égal à  $B_{n,0}(0) = 1$ .

Si  $k = n$  :

$B_{n,n}(t) = t^n$  et donc  $B_{n,n}$  est strictement croissante  $[0, 1]$  et admet donc un unique maximum, atteint en  $t = 1 = \frac{k}{n}$  et égal à  $B_{n,n}(1) = 1$ .

Si  $1 \leq k \leq n - 1$  :

$$\begin{aligned} B'_{n,k}(t) &= k \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k-1} \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} (k(1-t) - t(n-k)) \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} (k - tn) \end{aligned}$$

Ainsi  $B'_{n,k}(t)$  est, sur  $[0, 1]$ , du signe de  $k - nt$  et donc  $B_{n,k}$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{k}{n}\right]$  et strictement décroissante sur  $\left[\frac{k}{n}, 1\right]$ . Elle admet par conséquent un unique maximum, atteint en  $t = \frac{k}{n}$ , qui est égal à

$$B_{n,k} \left( \frac{k}{n} \right) = \binom{n}{k} \left( \frac{k}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{k^k (n-k)^{n-k}}{n^n}.$$

## VII. Un peu d'algèbre linéaire

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on note  $P'$  son polynôme dérivé et on définit les polynômes  $\Phi_n(P)$  et  $\Psi_n(P)$  par :

$$\Phi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X), \quad \Psi_n(P)(X) = \sum_{k=0}^n P \left( \frac{k}{n} \right) B_{n,k}(X).$$

1. Démontrer que  $\Phi_n$  et  $\Psi_n$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

—  $\Phi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$  : Soit  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Si  $P(X)$  est le polynôme nul, alors  $\Phi_n(P)(X) = 0$ . Si  $P(X)$  est un polynôme constant non nul, alors  $\Phi_n(P)(X) = nXP(X)$  est de degré  $1 \leq n$ . Supposons ensuite  $P(X)$  non constant, notons

$p$  son degré et écrivons  $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ , avec  $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ ,  $a_p \in \mathbb{R}^*$

(coefficient dominant de  $P$ ). Alors

$$\begin{aligned} \Phi_n(P)(X) &= n \sum_{k=0}^p a_k X^{k+1} + X(1-X) \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^p n a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^p k a_k X^k - \sum_{k=1}^p k a_k X^{k+1} \\ &= n a_0 X + \sum_{k=1}^p (n-k) a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^p k a_k X^k \end{aligned}$$

Si  $p < n$ , ceci est un polynôme de degré au plus  $p + 1 \leq n$ . Si  $p = n$ , on observe que le terme de degré  $n + 1$  disparaît de cette expression qui est donc bien un polynôme de degré au plus  $n$ .

—  $\Phi_n$  est linéaire : pour tous  $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}\Phi_n(P + \lambda Q)(X) &= nX(P(X) + \lambda Q(X)) + X(1 - X)(P(X) + \lambda Q(X))' \\ &= nXP(X) + n\lambda Q(X) + X(1 - X)(P'(X) + \lambda Q'(X)) \\ &= nXP(X) + X(1 - X)P'(X) + n\lambda Q(X) + X(1 - X)\lambda Q'(X) \\ &= \Phi_n(P)(X) + \lambda \Phi_n(Q)(X).\end{aligned}$$

—  $\Psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$  : Soit  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ .  $\Psi_n(P)(X)$  est une combinaison linéaire à coefficients réels (les  $P\left(\frac{k}{n}\right)$  pour  $0 \leq k \leq n$ ) des polynômes  $B_{n,0}, \dots, B_{n,n}$  qui sont tous de degré  $n$ . Ainsi le degré de  $\Psi_n(P)(X)$  est bien au plus égal à  $n$ .

—  $\Psi_n$  est linéaire : pour tous  $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}\Psi_n(P + \lambda Q)(X) &= \sum_{k=0}^n (P + \lambda Q)\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( P\left(\frac{k}{n}\right) + \lambda Q\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(X) \\ &= \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) + \lambda \sum_{k=0}^n Q\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) \\ &= \Psi_n(P)(X) + \lambda \Psi_n(Q)(X).\end{aligned}$$

2. Démontrer que, pour tout entier  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\Phi_n(B_{n,k})(X) = kB_{n,k}(X).$$

D'après **V.5.a.** et **VI.1.**, on a

$$\begin{aligned}\Phi_n(B_{n,0})(X) &= nXB_{n,0}(X) + X(1 - X)B'_{n,0}(X) \\ &= nX(1 - X)B_{n-1,0}(X) - X(1 - X)nB_{n-1,0}(X) \\ &= 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_n(B_{n,n})(X) &= nXB_{n,n}(X) + X(1 - X)B'_{n,n}(X) \\ &= nX^2B_{n-1,n-1}(X) + X(1 - X)nB_{n-1,n-1}(X) \\ &= nXB_{n-1,n-1}(X) \\ &= nB_{n,n}(X).\end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on a grâce à **V.5.b.** et **VI.1.** :

$$\begin{aligned}\Phi_n(B_{n,k})(X) &= nXB_{n,k}(X) + X(1 - X)B'_{n,k}(X) \\ &= nX((1 - X)B_{n-1,k}(X) + XB_{n-1,k-1}(X)) \\ &\quad + X(1 - X)n(B_{n-1,k-1}(X) - B_{n-1,k}(X)) \\ &= nXB_{n-1,k-1}(X) \\ &= n\binom{n-1}{k-1}X^k(1 - X)^{n-k}.\end{aligned}$$

Or  $n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k}$  et donc on termine le calcul par

$$\Phi_n(B_{n,k})(X) = k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = k B_{n,k}(X).$$

3. En déduire que  $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  et que  $\Phi_n$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On tire de **VII.2.** que les  $B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n}$  sont des vecteurs propres de  $\Phi_n$ , respectivement associés aux valeurs propres  $0, 1, \dots, n$ . En tant que vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, ils constituent une famille libre dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n+1$ , cette famille libre de  $n+1$  vecteurs en est alors une base. Comme  $\mathbb{R}_n[X]$  admet une base de vecteurs propres de  $\Phi_n$ , on en déduit que  $\Phi_n$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

4. Démontrer que  $\Phi_n$  n'est pas bijectif et que  $\Psi_n$  est bijectif.

$\Phi_n$  n'est pas injectif car  $\ker \Phi_n$  contient  $B_{n,0}$  qui n'est pas nul. Ainsi  $\Phi_n$  n'est pas bijectif.

Soit  $P(X) \in \ker \Psi_n$ . On a donc  $\sum_{k=0}^n P \binom{k}{n} B_{n,k}(X) = 0$  (polynôme nul).

Comme la famille  $(B_{n,0}, \dots, B_{n,n})$  est libre, on tire de cette égalité que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $P \binom{k}{n} = 0$  et donc que  $P(X)$  a au moins  $n+1$  racines. Comme  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ , on en déduit que  $P(X)$  est le polynôme nul.

On a donc montré que  $\ker \Psi_n = \{0\}$  et donc que  $\Psi_n$  est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, son injectivité implique sa bijectivité.

## Partie C : courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été inventées à la fin des années 1950 par Pierre Bézier, ingénieur des usines Renault, pour tracer des profils de carrosserie à l'aide d'un logiciel. Ces courbes sont également utilisées pour concevoir les polices de caractères dites polices vectorielles, comme la police Postscript.

### Définition

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  un  $n+1$ -uplet de points de  $\mathcal{P}$ . L'ensemble des points  $M(t) = \text{bar}((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \dots, (P_n, B_{n,n}(t)))$ , lorsque  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ , s'appelle la courbe de Bézier de points de contrôle  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ . On note cette courbe  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$ . Le point  $M(t)$  est le point de  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$  de paramètre  $t$ .

- VIII.** 1. Montrer que, pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $M(t)$  est bien défini.

D'après **I.2.**, un barycentre d'un système pondéré n'est bien défini que si le poids total de ce système est non nul. Ici le poids total est  $\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t)$  et donc est égal à 1 d'après **V.4.**, de sorte que  $M(t)$  est bien défini.

2. Montrer que, pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \overrightarrow{OP}_k.$$

Comme le poids total du système est égal à 1, l'égalité cherchée est une application immédiate de **I.3** où  $M = O$  et  $G = M(t)$ .

3. Démontrer que les points  $P_0$  et  $P_n$  appartiennent à la courbe de Bézier  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$ .

Comme pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $B_{n,k}(0) = 0$  (et  $B_{n,0}(0) = 1$ ) et, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a  $B_{n,k}(1) = 0$  (et  $B_{n,n}(1) = 1$ ), on en déduit que  $M(0) = P_0$  et  $M(1) = P_n$ . Ainsi  $P_0$  et  $P_1$  appartiennent bien à la courbe.

**IX.** On considère la courbe de Bézier  $\Gamma$  associée aux points de contrôle  $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n)$  et la courbe de Bézier  $\Gamma'$  associée aux points de contrôle  $(P_n, P_{n-1}, \dots, P_1, P_0)$  (la liste des points de contrôle de  $\Gamma'$  est parcourue en sens inverse de celle des points de contrôle de  $\Gamma$ ).

Pour tout réel  $t \in [0, 1]$ , on pose :

$$\begin{aligned} M(t) &= \text{bar}((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \dots, (P_{n-1}, B_{n,n-1}(t)), (P_n, B_{n,n}(t))), \\ N(t) &= \text{bar}((P_n, B_{n,0}(t)), (P_{n-1}, B_{n,1}(t)), \dots, (P_1, B_{n,n-1}(t)), (P_0, B_{n,n}(t))). \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $M(t) = N(1-t)$ .

Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a grâce à **V.3.** :

$$\begin{aligned} N(1-t) &= \text{bar}((P_n, B_{n,0}(1-t)), (P_{n-1}, B_{n,1}(1-t)), \dots, (P_0, B_{n,n}(1-t))) \\ &= \text{bar}((P_n, B_{n,n}(t)), (P_{n-1}, B_{n,n-1}(t)), \dots, (P_0, B_{n,0}(t))). \end{aligned}$$

Comme la définition d'un barycentre issue de **I.2.** ne dépend pas de l'ordre des points pondérés dans le système, on en déduit que  $N(1-t) = M(t)$ .

2. Que peut-on en déduire pour les courbes de Bézier  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  ?

$$\Gamma = \{M(t); t \in [0, 1]\} = \{N(1-t); t \in [0, 1]\} = \{N(t'); t' \in [0, 1]\} = \Gamma'.$$

**X.** Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle  $(P_0, P_1)$  est le segment  $[P_0, P_1]$ .

$$\begin{aligned} \Gamma((P_0, P_1)) &= \{\text{bar}((P_0, B_{1,0}(t)), (P_1, B_{1,1}(t))); t \in [0, 1]\} \\ &= \{\text{bar}((P_0, 1-t), (P_1, t)); t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

On en déduit grâce à **II.2.b.** que  $\Gamma((P_0, P_1)) = [P_0 P_1]$ .

**XI.** Dans cette question on suppose que  $P_0$  et  $P_1$  sont distincts et que  $P_{n-1}$  et  $P_n$  sont distincts.

Montrer qu'un vecteur tangent en  $P_0$  à  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$  est  $n\overrightarrow{P_0 P_1}$  et préciser un vecteur tangent en  $P_n$  à  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$ .

D'après **VIII.2.**,  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$  est la courbe paramétrée décrite par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) \overrightarrow{OP}_k.$$

$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puisque les  $B_{n,k}$  le sont et :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \sum_{k=0}^n B'_{n,k}(t) \overrightarrow{OP}_k.$$

À l'aide de **VI.2.**, on en tire en particulier :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = n\overrightarrow{P_0P_1}.$$

Or  $P_0$  et  $P_1$  sont supposés distincts ; donc le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0)$ , non nul, est un vecteur tangent à la courbe en  $P_0 = M(0)$ . Il en est de même pour le vecteur  $\overrightarrow{P_0P_1}$  qui lui est proportionnel.

En raisonnant de même en  $t = 1$ , on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(1) = n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}.$$

Comme  $P_{n-1}$  et  $P_n$  sont supposés distincts, le vecteur  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(1)$ , non nul, est un vecteur tangent à la courbe en  $M(1)$ . Donc  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$  qui lui est proportionnel est aussi un vecteur tangent à la courbe en  $P_n = M(1)$ .

**XII.** Soit  $g$  une application affine du plan  $\mathcal{P}$ . Montrer que l'image par  $g$  de la courbe de Bézier  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$  est une courbe de Bézier dont on précisera les points de contrôle.  $g(\Gamma((P_0, \dots, P_n))) = \{g(M(t)); t \in [0, 1]\}$  et on a alors directement  $g(\Gamma((P_0, \dots, P_n))) = \Gamma((g(P_0), \dots, g(P_n)))$  grâce à **IV**.

**XIII.** Soit  $i_0$  un entier de l'intervalle  $[[0, n]]$  et  $\vec{u}$  un vecteur de  $\vec{\mathcal{P}}$ . On note  $P'_{i_0}$  l'image du point  $P_{i_0}$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ . On considère la courbe de Bézier dans laquelle le point de contrôle  $P_{i_0}$  a été remplacé par  $P'_{i_0}$ , les autres étant inchangés. Pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , on note  $N(t)$  le point courant de cette nouvelle courbe de Bézier.

Montrer que, pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , le vecteur  $\overrightarrow{M(t)N(t)}$  est colinéaire à  $\vec{u}$  et que

$$\max_{t \in [0;1]} \|\overrightarrow{M(t)N(t)}\| = \binom{n}{i_0} \frac{i_0^{i_0} (n - i_0)^{n-i_0}}{n^n} \|\vec{u}\|.$$

Grâce à **VIII.2.**, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(t)N(t)} &= \overrightarrow{M(t)O} + \overrightarrow{ON(t)} \\ &= -\sum_{k=0}^n B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k} + \sum_{k=0, \neq i_0}^n B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k} + B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{OP'_{i_0}} \\ &= -B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{OP_{i_0}} + B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{OP'_{i_0}} \\ &= B_{n,i_0}(t)\overrightarrow{P_{i_0}P'_{i_0}} \\ &= B_{n,i_0}(t)\vec{u}. \end{aligned}$$

et donc, comme  $B_{n,i_0}(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\|\overrightarrow{M(t)N(t)}\| = B_{n,i_0}(t)\|\vec{u}\|$ , de sorte que

$$\max_{t \in [0,1]} (\|\overrightarrow{M(t)N(t)}\|) = \max_{t \in [0,1]} (B_{n,i_0}(t)) \cdot \|\vec{u}\|.$$

On conclut avec **VI.3.** qui donne

$$\max_{t \in [0,1]} (B_{n,i_0}(t)) = B_{n,i_0} \left( \frac{i_0}{n} \right) = \binom{n}{i_0} \frac{i_0^{i_0} (n - i_0)^{n-i_0}}{n^n}.$$

## Partie D : algorithme de Casteljau

**XIV.** Soient  $P_0, P_1, P_2$  trois points du plan  $\mathcal{P}$ . Soient  $t$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  et  $M(t)$  le point de paramètre  $t$  de la courbe de Bézier de points de contrôle  $(P_0, P_1, P_2)$ . On a donc :

$$M(t) = \text{bar}((P_0, B_{2,0}(t)), (P_1, B_{2,1}(t)), (P_2, B_{2,2}(t))).$$

1. Expliciter  $B_{2,0}(t), B_{2,1}(t), B_{2,2}(t)$ .

$$B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \text{ donc}$$

$$B_{2,0}(t) = (1-t)^2, \quad B_{2,1}(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,2}(t) = t^2.$$

2. Pour tout  $t$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , on note :

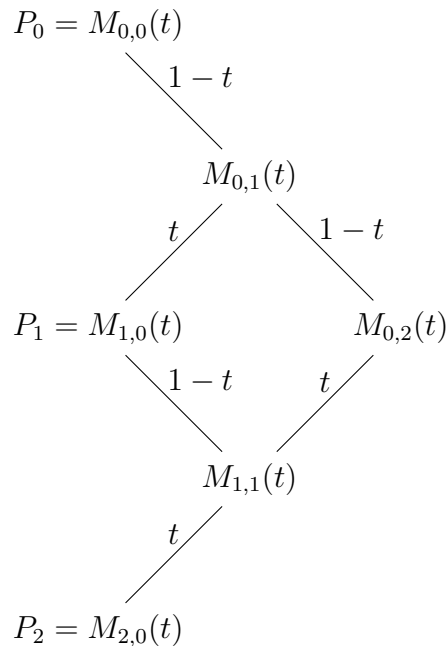
$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, M_{k,0}(t) = P_k,$$

$$M_{0,1}(t) = \text{bar}((M_{0,0}(t), 1-t), (M_{1,0}(t), t)),$$

$$M_{1,1}(t) = \text{bar}((M_{1,0}(t), 1-t), (M_{2,0}(t), t)),$$

$$M_{0,2}(t) = \text{bar}((M_{0,1}(t), 1-t), (M_{1,1}(t), t)).$$

On peut représenter cette construction à l'aide du schéma ci-dessous :



Montrer que  $M(t) = M_{0,2}(t)$ . On justifiera cette égalité en citant explicitement chacun des résultats utilisés.

$$\begin{aligned} M_{0,0}(t) &= P_0, \quad M_{1,0} = P_1, \quad M_{2,0} = P_2 \\ M_{0,1}(t) &= \text{bar}((P_0, 1-t), (P_1, t)), \\ M_{1,1}(t) &= \text{bar}((P_1, 1-t), (P_2, t)). \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
M_{0,2}(t) &= \text{bar}((M_{0,1}(t), 1-t), (M_{1,1}(t), t)) \\
&= \text{bar}((\text{bar}((P_0, 1-t), (P_1, t)), 1-t), (\text{bar}((P_1, 1-t), (P_2, t)), t)) \\
&= \text{bar}((P_0, (1-t)^2), (P_1, t(1-t)), (P_1, (1-t)t), (P_2, t^2)) \\
&\quad \text{III.3.} \\
&= \text{bar}((P_0, (1-t)^2), (P_1, 2t(1-t)), (P_2, t^2)) \\
&= M(t). \\
&\quad \text{XIV.1.}
\end{aligned}$$

**XV.** Soient  $n$  un entier naturel non nul,  $P_0, \dots, P_n$   $n+1$  points du plan et  $t$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . On définit par récurrence sur  $l$  les points  $M_{k,l}(t)$  du plan indexés par  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 0, n-l \rrbracket$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad M_{k,0}(t) = P_k, \\
&\forall l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n-l-1 \rrbracket, \quad M_{k,l+1}(t) = \text{bar}((M_{k,l}(t), 1-t), (M_{k+1,l}(t), t)).
\end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout  $l$  appartenant à  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et tout  $k$  appartenant à  $\llbracket 0, n-l \rrbracket$ ,

$$M_{k,l}(t) = \text{bar}((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \dots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))).$$

On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ . On va procéder par récurrence sur  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$  pour montrer la propriété  $(H_l)$  suivante :

$$(H_l) : \forall k \in \llbracket 0, n-l \rrbracket, M_{k,l}(t) = \text{bar}((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \dots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))).$$

- initialisation à  $l=0$  :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, M_{k,0}(t) = P_k = \text{bar}((P_k, B_{0,0}(t)))$  (c'est inutile ici mais on peut remarquer que  $B_{0,0}(t) = 1$ ).
- hérédité : supposons  $(H_l)$  vraie pour un certain entier  $l$  compris entre 0 et  $n-1$ . Montrons que  $(H_{l+1})$  est vraie. Soit donc  $k \in \llbracket 0, n-l-1 \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
M_{k,l+1}(t) &= \text{bar}((M_{k,l}(t), 1-t), (M_{k+1,l}(t), t)) \quad (\text{par définition}) \\
&= \text{bar}((\text{bar}((P_k, B_{l,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)), \dots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t))), 1-t), \\
&\quad \text{bar}((P_{k+1}, B_{l,0}(t)), (P_{k+2}, B_{l,1}(t)), \dots, (P_{k+l+1}, B_{l,l}(t))), t) \\
&\quad (\text{par hypothèse } (H_l)) \\
&= \text{bar}((P_k, B_{l,0}(t)(1-t)), (P_{k+1}, B_{l,1}(t)(1-t) + B_{l,0}(t)t), \\
&\quad \dots, (P_{k+l}, B_{l,l}(t)(1-t) + B_{l,l-1}(t)t), (P_{k+l+1}, B_{l,l}(t)t)) \\
&\quad (\text{par III.3. et V.4.}) \\
&= \text{bar}((P_k, B_{l+1,0}(t)), (P_{k+1}, B_{l+1,1}(t)), \dots, (P_{k+l+1}, B_{l+1,l+1}(t))) \\
&\quad (\text{par V.5.})
\end{aligned}$$

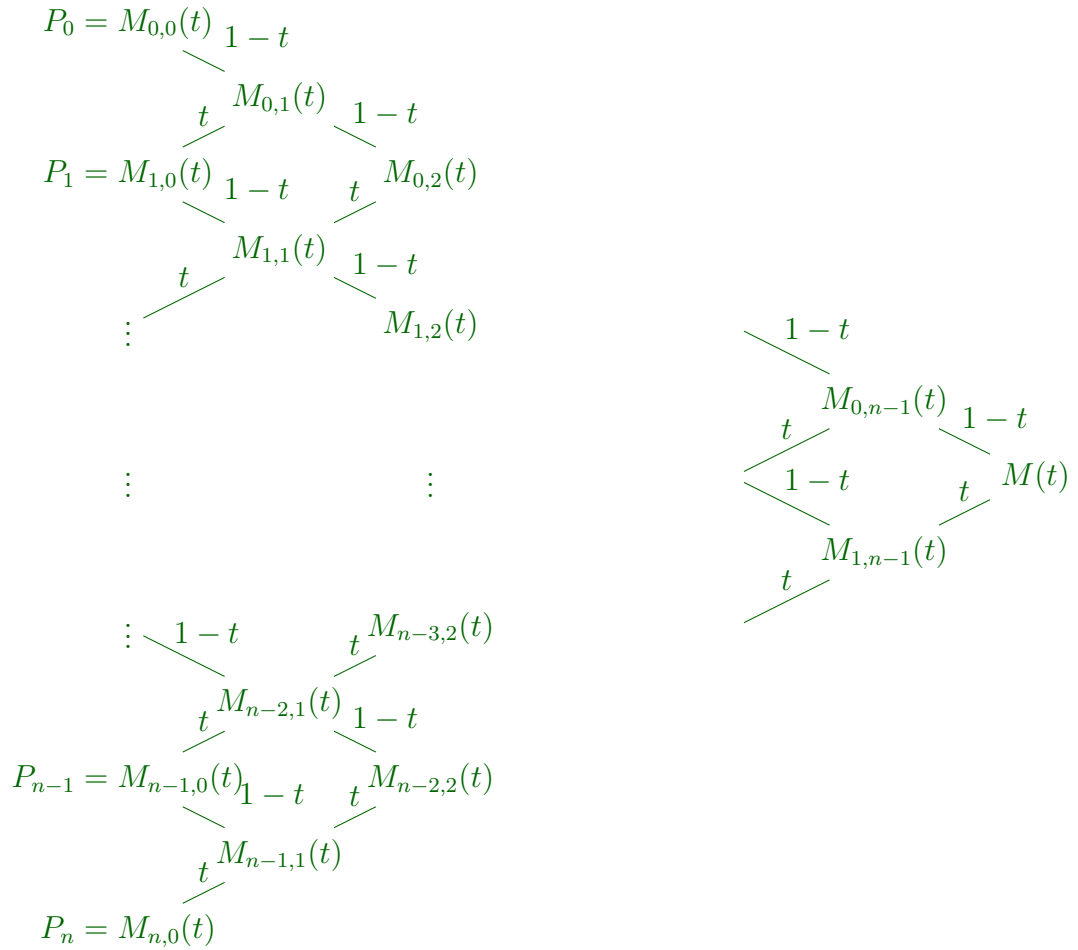
On en déduit que  $(H_{l+1})$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, comme  $(H_0)$  est vraie et  $\forall l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (H_l)$  vraie  $\implies (H_{l+1})$  vraie, on en déduit que la propriété  $(H_l)$  est vraie pour tout  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

2. Expliquer comment ces points permettent de construire le point  $M(t)$  de la courbe de Bézier  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$ .

On tire de la question précédente que  $M(t) = M_{0,n}(t)$  et donc le principe itératif de construction suivant :



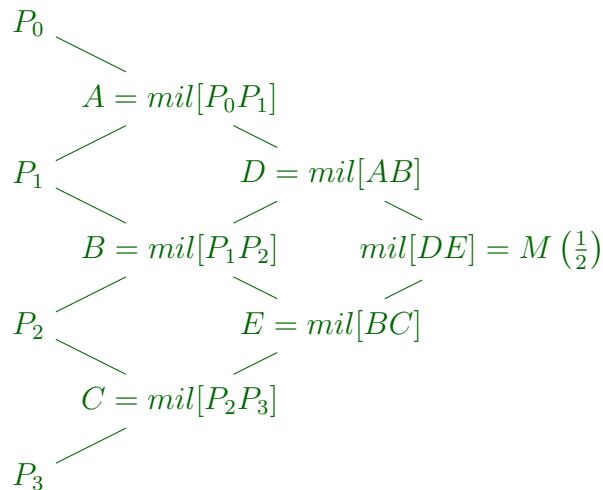


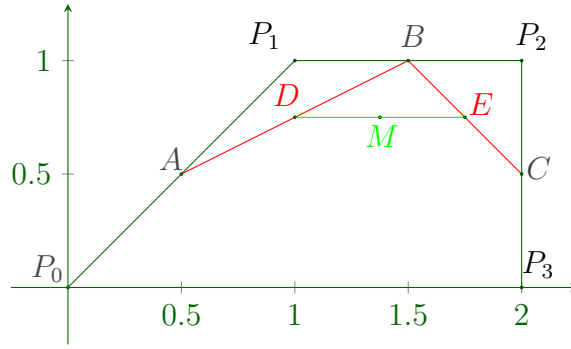
**XVI.** Dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points

$$P_0(0; 0) \qquad P_1(1; 1) \qquad P_2(2; 1) \qquad P_3(2; 0).$$

Construire géométriquement, à l'aide de l'algorithme de Casteljau, le point  $M\left(\frac{1}{2}\right)$  de la courbe de Bézier  $\Gamma((P_0, P_1, P_2, P_3))$  de paramètre  $t = \frac{1}{2}$ .

Ici on a  $n = 3$  et  $t = \frac{1}{2}$  et donc chaque barycentre construit à partir de deux points précédents sera le *milieu* du segment précédent :





## Partie E : points de contrôle aux sommets d'un carré

Dans toute cette partie,  $A, B, C, D$  sont les sommets d'un carré.

On note  $\mathcal{Q}$  l'ensemble  $\{A, B, C, D\}$ .

### XVII. Isométries du carré.

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$  des isométries du plan  $\mathcal{P}$  qui conservent globalement l'ensemble  $\mathcal{Q}$ . Parmi elles,  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  désigne l'ensemble de celles qui sont directes et  $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$  l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment  $[BC]$  est notée  $\Delta$  et  $s_\Delta$  désigne la réflexion d'axe  $\Delta$ .

1. Montrer que  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$  et  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour  $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$  ?

Comme une isométrie est bijective, montrons que  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$  et  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  sont des sous-groupes du groupe des bijections de  $\mathcal{P}$  dans lui-même, muni de la loi  $\circ$ .

—  $Id_{\mathcal{P}}$  appartient à  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$  et à  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ .

— Pour  $f, g \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ , on a :

$$\forall M, N \in \mathcal{P}, (f \circ g)(M)(f \circ g)(N) = f(g(M))f(g(N)) = g(M)g(N) = MN,$$

et donc  $f \circ g \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ . Et si en plus  $f$  et  $g$  sont directes, alors  $f \circ g$  aussi :

$$\det(\varphi_{f \circ g}) = \det(\varphi_f \circ \varphi_g) = \det(\varphi_f) \det(\varphi_g) = 1 \times 1 = 1.$$

— Pour  $f \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$  et  $M, N \in \mathcal{P}$  : si on note  $M' = f^{-1}(M)$  et  $N' = f^{-1}(N)$ , on a  $f(M')f(N') = M'N'$  (car  $f$  est une isométrie) et donc  $MN = f^{-1}(M)f^{-1}(N)$ , de sorte que  $f^{-1} \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ . Et si en plus  $f$  est directe, alors

$$f^{-1} \text{ aussi : } \det(\varphi_{f^{-1}}) = \det(\varphi_f^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi_f)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$  n'est pas un groupe car il ne contient par exemple pas  $Id_{\mathcal{P}}$ .

2. Montrer que l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) & \rightarrow \mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) \\ f & \mapsto s_\Delta \circ f \end{cases}$$

est bijective.

Notons que, comme  $s_\Delta \in \mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$ , pour tout  $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ , on a bien  $s_\Delta \circ f \in \mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$  (car  $\det(\varphi_{s_\Delta \circ f}) = \det(\varphi_{s_\Delta}) \det(\varphi_f) = -1 \times 1 = -1$ ). Ainsi  $F$  est bien définie. De la même façon, l'application

$$G : \begin{cases} \mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) & \rightarrow \mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) \\ g & \mapsto s_\Delta \circ g \end{cases}$$

est bien définie. De  $s_\Delta \circ s_\Delta = Id_{\mathcal{P}}$ , on déduit  $F \circ G = Id_{\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})}$  et  $G \circ F = Id_{\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})}$ , ce qui suffit pour montrer que  $F$  est bijective.

3. Démontrer que  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  contient exactement 4 éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ .

Notons  $\Omega$  le centre du carré  $ABCD$ . On a  $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D} = \vec{0}$ , de sorte que  $\Omega = \text{bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1))$ . Alors, pour tout  $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ ,  $f$  étant une application affine et laissant globalement invariante  $\mathcal{Q}$ , on a

$$\begin{aligned} f(\Omega) &\stackrel{\text{IV.}}{=} \text{bar}((f(A), 1), (f(B), 1), (f(C), 1), (f(D), 1))) \\ &= \text{bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)) = \Omega. \end{aligned}$$

Ainsi les éléments de  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  sont des isométries directes de  $\mathcal{P}$  ayant au moins un point fixe,  $\Omega$ . Ce sont donc des rotations, de centre  $\Omega$ . L'angle d'une telle rotation  $f$  est alors déterminé par l'angle  $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega f(A)})$ , qui vaudra donc  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  selon que  $f(A) = A, B, C$  ou  $D$ . Ainsi  $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$  contient exactement 4 éléments :  $f_1 = Id_{\mathcal{P}}$ ,  $f_2 = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f_3 = r(\Omega, \pi)$  (symétrie centrale de centre  $\Omega$ ), et  $f_4 = r\left(\Omega, \frac{3\pi}{2}\right)$ . La table du groupe est :

$\circ$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_2$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_1$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$
$f_4$	$f_4$	$f_1$	$f_2$	$f_3$

4. Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ .

Grâce à **XVII.2.**, on a  $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) = \{f_5, f_6, f_7, f_8\}$ , avec :

$$\begin{aligned} f_5 &= s_{\Delta} \circ f_1 = s_{\Delta} \\ f_6 &= s_{\Delta} \circ f_2 = s_{(BD)} \text{ (réflexion d'axe } (BD)) \\ f_7 &= s_{\Delta} \circ f_3 = s_{\Delta'} \text{ (réflexion d'axe la médiatrice } \Delta' \text{ de } [AB]) \\ f_8 &= s_{\Delta} \circ f_4 = s_{(AC)} \text{ (réflexion d'axe } (AC)), \end{aligned}$$

En effet, Pour trouver  $s_{\Delta} \circ f_2$ , on a décomposé la rotation  $f_2$  en  $f_2 = s_{\Delta} \circ s_{(BD)}$  puisque l'angle orienté entre les deux droites  $(BD)$  et  $\Delta$  est égal, modulo  $\pi$ , à la moitié de l'angle de la rotation  $f_2$ . Un raisonnement similaire permet de déterminer  $s_{\Delta} \circ f_3$  et  $s_{\Delta} \circ f_4$ . Finalement,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{Q}) &= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\} \\ &= \left\{ Id_{\mathcal{P}}, r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right), s_{\Omega}, r\left(\Omega, \frac{3\pi}{2}\right), s_{\Delta}, s_{(BD)}, s_{\Delta'}, s_{(AC)} \right\}. \end{aligned}$$

**XVIII.** On se propose d'étudier toutes les courbes de Bézier dont les points de contrôle sont situés aux sommets du carré  $\mathcal{Q}$ .

**Rappel :** l'ensemble des permutations d'un ensemble fini  $E$  est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est noté  $\mathfrak{S}(E)$ .

1. Quel est le cardinal du groupe  $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$  ?

$\mathcal{Q}$  étant un ensemble de cardinal 4, le groupe  $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$  est de cardinal  $4! = 24$ .

2. Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ , on note  $\Gamma_\sigma = \Gamma((\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)))$  la courbe de Bézier de points de contrôle  $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D))$ . La courbe  $\Gamma_\sigma$  est dite courbe de Bézier associée à la permutation  $\sigma$ . En s'appuyant sur les questions précédentes, déterminer huit permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$  telles que  $\Gamma_\sigma$  soit isométrique à  $\Gamma(A, B, C, D)$ .

Les 8 isométries  $f_i$  trouvées en **XVII.4** induisent 8 permutations  $\sigma_i$  de  $\mathcal{Q}$  (en posant  $\sigma_i = f_{i|\mathcal{Q}}$ ). On a alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} f_i(\Gamma((A, B, C, D))) &\stackrel{\text{XII.}}{=} \Gamma((f_i(A), f_i(B), f_i(C), f_i(D))) \\ &= \Gamma((\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C), \sigma_i(D))) \\ &= \Gamma_{\sigma_i} \end{aligned}$$

et donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ,  $\Gamma((A, B, C, D))$  et  $\Gamma_{\sigma_i}$  sont isométriques (via l'isométrie  $f_i$ ).

3. On prend pour sommets du carré les points

$$A = (-1 ; -1) \quad B = (1 ; -1) \quad C = (1 ; 1) \quad D = (-1 ; 1)$$

et on note  $\Gamma_1$  la courbe de Bézier  $\Gamma((A, B, D, C))$  associée à la transposition qui échange  $C$  et  $D$ .

Pour  $t \in [0, 1]$ , on rappelle que le point courant de  $\Gamma_1$  de paramètre  $t$  est le point

$$M(t) = \text{bar}((A, B_{3,0}(t)), (B, B_{3,1}(t)), (D, B_{3,2}(t)), (C, B_{3,3}(t)))$$

- a. Montrer que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma((C, D, B, A))$  sont égales. En déduire que  $\Gamma_1$  est symétrique par rapport au point  $O$ .

$$\Gamma_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma((A, B, D, C)) \stackrel{\text{IX.2}}{=} \Gamma((C, D, B, A)).$$

On a alors

$$\begin{aligned} s_O(\Gamma_1) &\stackrel{\text{XII.}}{=} \Gamma(s_O(A), s_O(B), s_O(D), s_O(C)) \\ &= \Gamma((C, D, B, A)) \\ &= \Gamma_1 \end{aligned}$$

et donc  $\Gamma_1$  est bien symétrique par rapport à  $O$ .

- b. Montrer que les coordonnées  $(x(t); y(t))$  de  $M(t)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont données par :

$$x(t) = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1, \quad y(t) = -4t^3 + 6t^2 - 1.$$

D'après **VIII.2.** appliqué à  $\Gamma_1 = \Gamma((A, B, D, C))$ , on a

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_{3,0}(t)\overrightarrow{OA} + B_{3,1}(t)\overrightarrow{OB} + B_{3,2}(t)\overrightarrow{OD} + B_{3,3}(t)\overrightarrow{OC}$$

et donc, comme

$$B_{3,0}(t) = (1-t)^3, \quad B_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_{3,2}(t) = 3t^2(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3,$$

on en tire

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^3(-1) + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t)(-1) + t^3 = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 \\ y(t) &= (1-t)^3(-1) + 3t(1-t)^2(-1) + 3t^2(1-t) + t^3 = -4t^3 + 6t^2 - 1. \end{aligned}$$

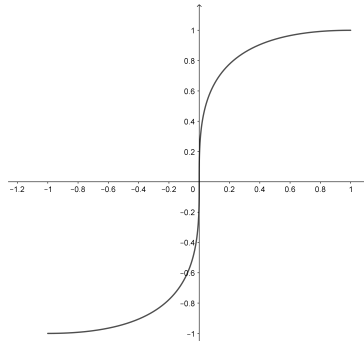
c. Tracer la courbe paramétrée  $\Gamma_1$ .

$x$  et  $y$  sont des fonctions dérivables sur  $[0, 1]$  et on a

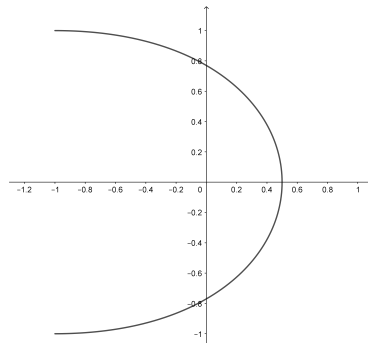
$$x'(t) = 24t^2 - 24t + 6 = 24 \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

$$y'(t) = -12t^2 + 12t = 12t(1 - t) \geq 0.$$

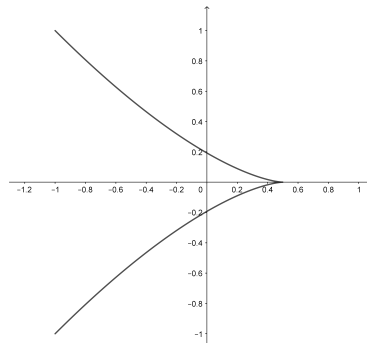
On en déduit que  $x$  et  $y$  sont croissantes sur  $[0, 1]$ , de  $-1$  à  $1$  ( $x(0) = -1 = y(0)$  et  $x(1) = 1 = y(1)$ ). On a  $x\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = y\left(\frac{1}{2}\right)$  donc  $M\left(\frac{1}{2}\right) = O$ . On a  $x'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  et  $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ , donc la courbe admet une tangente verticale en  $O$ . On a  $M(0) = A$ . D'après **XI.**, la tangente en  $A$  est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . De même,  $M(1) = C$  et la tangente en  $C$  est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{DC}$ . On obtient la courbe :



4. On admet que les deux courbes  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  représentées ci-dessous sont aussi des courbes de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré  $\mathcal{Q}$ .



$\Gamma_2$



$\Gamma_3$

Déterminer une permutation  $\tau_2$  de  $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$  telle que  $\Gamma_2 = \Gamma_{\tau_2}$  et une permutation  $\tau_3$  de  $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$  telle que  $\Gamma_3 = \Gamma_{\tau_3}$ .

On remarque que  $A$  et  $D$  appartiennent à  $\Gamma_2$ , mais pas  $B$  et  $C$ . Ainsi d'après **VIII.3.** et en admettant que  $\Gamma_2$  est une courbe ayant pour points de contrôle  $A, B, C, D$ , on a  $\Gamma_2 = \Gamma((A, B, C, D)) (= \Gamma((D, C, B, A)))$  ou  $\Gamma_2 = \Gamma((A, C, B, D)) (= \Gamma((D, B, C, A)))$ . Or, grâce à **XI.**, on sait que les vecteurs tangents en  $A$  respectivement à  $\Gamma((A, B, C, D))$  et  $\Gamma((A, C, B, D))$  sont  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . On en tire donc, au vu de la courbe  $\Gamma_2$ , que  $\Gamma_2 = \Gamma((A, B, C, D))$ , de sorte que  $\Gamma_2 = \Gamma_{\tau_2}$ , avec  $\tau_2 = id_{\mathcal{Q}}$ .

Avec le même raisonnement ( $A, D \in \Gamma_3$  et  $\overrightarrow{AC}$  vecteur tangent en  $A$  à  $\Gamma_3$  au vu de la courbe), on obtient  $\Gamma_3 = \Gamma((A, C, B, D))$ , de sorte que  $\Gamma_3 = \Gamma_{\tau_3}$  avec  $\tau_3 = (B C)$  (transposition de  $B$  et  $C$ ).

5. À l'aide du résultat précédent, démontrer que  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ce qui est confirmé par les représentations graphiques. L'axe des abscisses est la droite précédemment notée  $\Delta$ , médiatrice de  $[BC]$ .

$$\begin{aligned}
s_\Delta(\Gamma_2) &= s_\Delta(\Gamma((A, B, C, D))) \\
&\stackrel{\text{XII.}}{=} \Gamma(s_\Delta(A), s_\Delta(B), s_\Delta(C), s_\Delta(D)) \\
&= \Gamma((D, C, B, A)) \\
&\stackrel{\text{IX.}}{=} \Gamma((A, B, C, D)) \\
&= \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que  $s_\Delta(\Gamma_3) = \Gamma_3$ . On en déduit que  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

6. Démontrer que toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré ABCD est isométrique à l'une des trois courbes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

Il y a au plus 24 courbes de Bézier de points de contrôle  $A, B, C, D$ , ce sont les  $\Gamma_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ .

En **XVIII.2.**, on a vu que les 8 courbes  $\Gamma_{\sigma_i}$  ( $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ) sont isométriques à  $\Gamma((A, B, C, D))$ , c'est-à-dire à  $\Gamma_2$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\sigma_i \circ \tau_3} &= \Gamma((\sigma_i(A), \sigma_i(C), \sigma_i(B), \sigma_i(D))) \\
&= f_i(\Gamma((A, C, B, D))) \\
&= f_i(\Gamma_3),
\end{aligned}$$

et donc les 8 courbes  $\Gamma_{\sigma_i \circ \tau_3}$  ( $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ) sont isométriques à  $\Gamma_3$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\sigma_i \circ (C D)} &= \Gamma((\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(D), \sigma_i(C))) \\
&= f_i(\Gamma((A, B, D, C))) \\
&= f_i(\Gamma_1),
\end{aligned}$$

et donc les 8 courbes  $\Gamma_{\sigma_i \circ (C D)}$  ( $i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ) sont isométriques à  $\Gamma_1$ .

Enfin, en reprenant la description faite en **XVII.4.** et **XVIII.2.**, et en notant  $(MN)$  la transposition échangeant  $M$  et  $N$  (et  $(MNP)$  le 3-cycle transformant  $M$  en  $N$ ,  $N$  en  $P$ ,  $P$  en  $M$ , etc), on a

$$\{\sigma_i; 1 \leq i \leq 8\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{id}_{\mathcal{Q}}, (ABCD), (AC) \circ (BD), (ADCB), \\ (AD) \circ (BC), (AC), (AB) \circ (CD), (BD) \end{array} \right\},$$

puis

$$\{\sigma_i \circ (B C); 1 \leq i \leq 8\} = \left\{ \begin{array}{l} (BC), (ABD), (ACDB), (ADC), \\ (AD), (ACB), (ABDC), (BCD) \end{array} \right\},$$

et

$$\{\sigma_i \circ (C D); 1 \leq i \leq 8\} = \left\{ \begin{array}{l} (CD), (ABC), (ACBD), (ADB), \\ (ADBC), (ACD), (AB), (BDC) \end{array} \right\}.$$

Ces 24 permutations étant deux à deux distinctes, on conclut que

$$\mathfrak{S}(\mathcal{Q}) = \{\sigma_i; i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket\} \cup \{\sigma_i \circ (B C); i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket\} \cup \{\sigma_i \circ (C D); i \in \llbracket 1, 8 \rrbracket\}$$

et donc que toutes les courbes de Bézier ont bien été traitées dans l'un des 3 cas ci-dessus.

7. En déduire que toute courbe de Bézier dont les points de contrôle sont les sommets d'un carré est semblable à l'une des trois courbes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

Soit un carré  $A'B'C'D'$  et  $\mathcal{Q}' = \{A', B', C', D'\}$ . En tant que carré,  $A'B'C'D'$  est semblable au carré  $ABCD$ , c'est-à-dire qu'il existe une similitude  $g$  de  $\mathcal{P}$  telle que  $g(A) = A', g(B) = B', g(C) = C', g(D) = D'$ .

La restriction de  $g$  à  $\mathcal{Q}$  induit une bijection  $\tau$  de  $\mathcal{Q}$  sur  $\mathcal{Q}'$ .

Notons que l'application  $\Phi_\tau : \mathfrak{S}(\mathcal{Q}') \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{Q}), \sigma' \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma' \circ \tau$  est bijective (d'inverse  $\Phi_\tau^{-1} : \mathfrak{S}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{Q}'), \sigma \mapsto \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ ). Soit  $\Gamma((\sigma'(A'), \sigma'(B'), \sigma'(C'), \sigma'(D')))$  (avec  $\sigma' \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q}')$ ) une courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets de  $A'B'C'D'$ . Notons  $\sigma = \Phi_\tau(\sigma')$ , de sorte que  $\sigma' = \tau \circ \sigma \tau^{-1}$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \Gamma((\sigma'(A'), \sigma'(B'), \sigma'(C'), \sigma'(D'))) &= \Gamma((\tau \circ \sigma \tau^{-1}(A'), \dots, \tau \circ \sigma \tau^{-1}(D'))) \\ &= g(\Gamma((\sigma \tau^{-1}(A'), \dots, \sigma \tau^{-1}(D'))) \\ &= g(\Gamma((\sigma(A), \dots, \sigma(D))) \\ &= g(\Gamma_\sigma) \end{aligned}$$

Ainsi toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets de  $A'B'C'D'$  est semblable à une courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets de  $ABCD$ , qui elle-même est isométrique à  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ou  $\Gamma_3$  d'après **XVIII.6.** On en déduit que toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets de  $A'B'C'D'$  est semblable à  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ou  $\Gamma_3$ .

## Partie F : raccordement de courbes de Bézier

Pour construire une courbe de Bézier de forme complexe, il faut utiliser de nombreux points de contrôle. Dans ce cas, le degré des polynômes de Bernstein est élevé et la construction de la courbe de Bézier peut être lourde. Il est alors plus judicieux de raccorder des courbes de Bézier de degré peu élevé.

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls supérieurs ou égaux à 2 et soient  $P_0, \dots, P_n$  et  $Q_0, \dots, Q_m$  des points de  $\mathcal{P}$ . On pose :

$$\begin{aligned} M(t) &= \text{bar}((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \dots, (P_n, B_{n,n}(t))), \\ N(t) &= \text{bar}((Q_0, B_{m,0}(t)), (Q_1, B_{m,1}(t)), \dots, (Q_m, B_{m,m}(t))). \end{aligned}$$

On suppose que  $P_n$  et  $Q_0$  sont confondus ; les deux courbes de Bézier  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$  et  $\Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$  se raccordent donc en ce point. La courbe raccordée est notée

$$\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$$

On dit que la courbe raccordée  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$  est *lisse au point de raccordement* lorsque la demi-tangente à gauche à  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$  en  $P_n$  et la demi-tangente à droite  $\Gamma((Q_0, \dots, Q_m))$  en  $Q_0$  ont la même direction.

**XIX.** Dans cette question on suppose que  $P_{n-1}, P_n$  et  $Q_1$  sont trois points deux à deux distincts.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $P_{n-1}, P_n$  et  $Q_1$  pour que la courbe raccordée  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$  soit lisse au point

de raccordement.

*Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.*

D'après **XI.**, comme  $P_{n-1}$  et  $P_n$  sont distincts, la demi-tangente à gauche à  $\Gamma((P_0, \dots, P_n))$  en  $P_n$  est dirigée par  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ . Et de même, comme  $P_n (= Q_0)$  et  $Q_1$  sont distincts, la demi-tangente à droite à  $\Gamma((Q_0, \dots, Q_m))$  est dirigée par  $\overrightarrow{Q_0Q_1} = \overrightarrow{P_nQ_1}$ . Ainsi la courbe raccordée est lisse en  $P_n = Q_0$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$  et  $\overrightarrow{P_nQ_1}$  sont colinéaires, autrement dit si et seulement si les points  $P_{n-1}, P_n$  et  $Q_1$  sont alignés.

2. On admet que la courbe raccordée  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$  peut être paramétrée par :

$$t \mapsto \overrightarrow{OR(t)} = \begin{cases} \overrightarrow{OM(2t)} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{ON(2t-1)} & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $P_{n-1}, P_n$  et  $Q_1$  pour que ce paramétrage de  $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \dots, Q_m))$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ .

*Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.*

La fonction  $\theta : t \mapsto \overrightarrow{OR(t)}$  définie sur  $[0; 1]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  et sur  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \overrightarrow{OR(t)} = \overrightarrow{OP_n}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \overrightarrow{OR(t)} = \overrightarrow{OQ_0}.$$

Comme  $P_n = Q_0$ ,  $\theta$  est continue en  $\frac{1}{2}$ .

D'après **XI.**, les vecteurs dérivés à gauche et à droite en  $\frac{1}{2}$  sont respectivement

$$2n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \quad 2m\overrightarrow{Q_0Q_1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \theta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; 1] &\iff 2n\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = 2m\overrightarrow{Q_0Q_1} \\ &\iff n\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = m\overrightarrow{P_nQ_1}. \end{aligned}$$

**XX.** On reprend la courbe  $\Gamma_1$  introduite dans la question XVIII. 3.

1. On se propose de raccorder  $\Gamma_1$  en  $C$  à une courbe de Bézier  $\Gamma((C, E, F))$  à trois points de contrôle. Expliquer où il faut placer les points  $E$  et  $F$  pour respecter les deux contraintes suivantes :
  - a. le paramétrage de la courbe raccordée introduit dans la question XIX. 2. est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
  - b. le point  $F$  est situé sur l'axe  $(Ox)$  et la tangente en  $F$  à la courbe a pour pente 1.



On note alors  $\Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma((C, E, F))$ .

D'après **XIX.**, le paramétrage de la courbe raccordée  $\Gamma((A, B, D, C)) \vee \Gamma((C, E, F))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si  $3\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CE}$ , ce qui donne

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 1 \end{pmatrix},$$

et donc  $E = (4; 1)$ .

D'après la question **XI.**, la tangente à  $\Gamma$  en  $F$  est dirigée par  $\overrightarrow{EF}$  et, par hypothèse, par le vecteur  $(1; 1)$ . Ces deux vecteurs sont donc colinéaires. On en déduit que

$$x_F - 4 = y_F - 1.$$

De plus, comme  $F$  est sur l'axe des abscisses,  $y_F = 0$  et donc  $F = (3; 0)$ .

2. Donner l'allure de la courbe  $\Gamma$ .

