Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on note le conjugué de z par $\overline{z}$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $GL_n(\mathbb{C})$.

Partie A : rotations et translations du plan

On se place dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct.

Notations.
Soit θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π et Ω un point de $\mathcal{P}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $r_{\Omega,\theta}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

I. Question de cours. Soient θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π, Ω un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. L'affixe de Ω est notée ω et l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est notée $z_{\overrightarrow{u}}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$, d'affixe z. Déterminer l'affixe z' de l'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$. Déterminer l'affixe z'' de l'image de M par $r_{\Omega,\theta}$.

L'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$ est notée M'. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{u}$, donc $z' - z = z_{\overrightarrow{u}}$ et $z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$.
L'image de M par $r_{\Omega,\theta}$ est notée M''. Si M est différent de Ω, l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est égal à θ et $OM = OM'$, donc

$$\frac{z'' - \omega}{z - \omega} = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Par suite,

$$z'' = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

II. Soient a un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors f est une translation dont on précisera le vecteur.
   Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe b. D'après la question I, pour tout point M d'affixe z, l'image de M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z + b$, donc $t(M) = f(M)$. Par suite, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

a. Montrer que f possède un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe ω.
Soit M un point du plan, d'affixe z.

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff az + b = z \\ &\iff (1-a)z = b \\ &\iff z = \frac{b}{1-a}, \end{aligned}$$

car $1 - a \neq 0$. Donc f a un unique point fixe, le point d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

b. Montrer que l'image par f du point M d'affixe z est le point d'affixe

$$a(z-\omega)+\omega.$$

Par construction, $a\omega + b = \omega$ donc $b = \omega - a\omega$. L'affixe de $f(M)$ est donc

$$az + b = az + \omega - a\omega = a(z-\omega)+\omega.$$

c. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
Comme a est de module 1, il existe un réel θ tel que $a = e^{i\theta}$. D'après la question I, pour tout point M du plan, l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$e^{i\theta}(z-\omega)+\omega = a(z-\omega)+\omega,$$

donc $r(M) = f(M)$. Par suite, f est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

III. Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes de module 1 et b_1 et b_2 deux nombres complexes. On considère l'application f_1, respectivement f_2, de $\mathcal{P}$ dans lui-même, envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe $a_1 z + b_1$, respectivement $a_2 z + b_2$.

1. Soit $f = f_1 \circ f_2$. Pour tout point M d'affixe z, calculer l'affixe de $f(M)$.
L'affixe de $f(M)$ est

$$a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1.$$

2. Montrer que f est une translation ou une rotation.
Comme $|a_1 a_2| = |a_1||a_2| = 1$, d'après la question II, f est une translation si $a_1 a_2 = 1$ et une rotation sinon.

IV. Soient r_1 la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.
Soit M un point du plan, d'affixe z. L'affixe de $r_1(M)$ est

$$e^{\frac{i\pi}{2}}(z-1)+1 = iz - i + 1.$$

L'affixe de $r_2(M)$ est

$$e^{-\frac{i\pi}{2}}(z-0)+0 = -iz.$$

L'affixe de $r_1 \circ r_2(M)$ est donc

$$i(-iz) - i + 1 = z - i + 1.$$

Donc $r_1 \circ r_2$ est la translation de vecteur d'affixe $1 - i$. L'affixe de $r_2 \circ r_1(M)$ est

$$-i(iz - i + 1) = z - 1 - i.$$

Donc $r_2 \circ r_1$ est la translation de vecteur d'affixe $-1 - i$.

V. On considère l'ensemble G formé des rotations de $\mathcal{P}$ et des translations de $\mathcal{P}$. Montrer que G est un groupe pour une loi que l'on précisera.

L'ensemble G est non vide car l'identité appartient à G. Si f_1 et f_2 sont deux éléments de G, d'après la question III, $f_1 \circ f_2$ est aussi un élément de G. De plus, si f est une rotation ou une translation, il s'agit d'une bijection de $\mathcal{P}$ dans lui-même et la bijection réciproque est aussi une rotation (de même centre et d'angle opposé si f_1 est une rotation) ou une translation (de vecteur opposé si f est une translation). On a ainsi montré que G est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathcal{P}$ dans lui-même. Il s'agit donc d'un groupe pour la loi de composition $\circ$.

Partie B : une construction géométrique

On se place de nouveau dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$. On a montré dans la partie précédente que, sous certaines conditions, la composée de deux rotations est une rotation. On cherche ici à construire le centre de cette rotation.

Notations.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. La symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ est notée $s_{\mathcal{D}}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{P}$, on note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

VI. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan, sécantes en un point Ω. On désigne par $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, respectivement. On considère l'application $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

1. Montrer que Ω est un point fixe de f.

Comme Ω est un point de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$, c'est un point fixe de $s_{\mathcal{D}_1}$ et de $s_{\mathcal{D}_2}$, donc $f(\Omega) = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}(\Omega) = s_{\mathcal{D}_2}(\Omega) = \Omega$.

2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de Ω. Soient $M' = s_{\mathcal{D}_1}(M)$ et $M'' = s_{\mathcal{D}_2}(M')$. Montrer que les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u_1})$ et $(\vec{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$ sont égaux. On montrerait de même que les angles $(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u_2})$ et $(\vec{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''})$ sont égaux.

Comme $\Omega \in \mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_1$ est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$, donc $(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u_1}) = (\vec{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$.

3. Montrer que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv 2(\vec{u_1}, \vec{u_2})[2\pi]$.

En utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) &\equiv (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u_1}) + (\vec{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) \\ &\quad + (\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u_2}) + (\vec{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''}) \\ &\equiv 2(\vec{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) + 2(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u_2}) \\ &\equiv 2(\vec{u_1}, \vec{u_2})[2\pi].\end{aligned}$$

4. Montrer que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$.

Comme $s_{\mathcal{D}_1}$ et $s_{\mathcal{D}_2}$ sont des isométries,

$$\Omega M = s_{\mathcal{D}_1}(\Omega) s_{\mathcal{D}_1}(M) = \Omega M' = s_{\mathcal{D}_2}(\Omega) s_{\mathcal{D}_2}(M') = \Omega M''.$$

5. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

Comme $\Omega M = \Omega M''$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$, M'' est l'image de M par la rotation r de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Comme de plus $f(\Omega) = r(\Omega) = \Omega$, $f = r$.

VII. Soient r_1 et r_2 deux rotations, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

1. Déterminer deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que $r_1 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.

Soit $\mathcal{D}_1$ l'image de la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ par la rotation de centre Ω_1 et d'angle $\dfrac{\theta_1}{2}$. En notant $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, alors $2(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}, \overrightarrow{u_1}) = \theta_1$. Donc $s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)} = r_1$.

Soit $\mathcal{D}_2$ l'image de la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ par la rotation de centre Ω_2 et d'angle $-\dfrac{\theta_2}{2}$. En notant $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, alors $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}) = \theta_2$. Donc $s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2} = r_2$.

2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.

Alors

$$r_1 \circ r_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2} = s_{\mathcal{D}_1} \circ Id_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{D}_2} = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}.$$

3. On suppose $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en un point Ω. Montrer qu'alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

D'après la question VI, $r_1 \circ r_2$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1})$.

4. Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit Ω_1 le point d'affixe i et Ω_2 le point d'affixe 0. On construit à la règle et au compas le point Ω_2', image de Ω_2 par la rotation de centre Ω_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. On construit ensuite l'image Ω_1' de Ω_1 par la rotation de centre Ω_2 et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$. Alors Ω est le point d'intersection de $(\Omega_1\Omega_2')$ et de $(\Omega_1'\Omega_2)$.

5. Que se passe t-il si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ?

Dans ce cas, $s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ est une translation.

Partie C : structure des quaternions

Soient a et b deux nombres complexes. On note $M(a,b)$ la matrice complexe suivante :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(a,b)$ est appelée un quaternion. On considère en particulier les quaternions suivants :

$$E = M(1,0), \qquad I = M(i,0), \qquad J = M(0,1), \qquad K = M(0,i).$$

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(i,0)$ avec la matrice identité d'ordre 2, $I_2 = E$.

On note $\mathbb{H} = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

VIII. **1.** Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est donné par les 4 matrices élémentaires

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est donné par les 8 matrices élémentaires

$$\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\end{array}\right).$$

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dont une base est (E, I, J, K).

Soient $p, q \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $p = M(a, b)$ et $q = M(c, d)$. Alors :

$$p + \lambda q = \begin{pmatrix}a+\lambda c & -b-\lambda d\\ \overline{b}+\lambda\overline{d} & \overline{a}+\lambda\overline{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+\lambda c & -(b+\lambda d)\\ \overline{b+\lambda d} & \overline{a+\lambda c}\end{pmatrix} = M(a+\lambda c, b+\lambda d) \in \mathbb{H}.$$

Donc $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On pose $a = x + iy$ et $b = z + it$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}M(a,b) &= \begin{pmatrix}x+iy & -z-it\\ z-it & x-iy\end{pmatrix}\\ &= x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\\ & xE + yI + zJ + tK.\end{aligned}$$

Donc (E, I, J, K) engendre $\mathbb{H}$. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $xE + yI + zJ = tK = (0)$. Alors :

$$\begin{pmatrix}x+iy & -z-it\\ z-it & x-iy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Donc $x + iy = 0$ et $z - it = 0$. Comme x, y, z et t sont des nombres réels, $x = y = z = t = 0$, donc (E, I, J, K) est une famille libre de $\mathbb{H}$. En conclusion, il s'agit d'une base de $\mathbb{H}$.

En conséquence, tout quaternion q s'écrit de manière unique $q = xE+yI+zJ+tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, calculer $M(a, b)M(a', b')$. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

$$M(a,b)M(a',b') = \begin{pmatrix}aa' - b\overline{b'} & -ab' - b\overline{a'}\\ \overline{b}a' + \overline{a}\overline{b'} & -\overline{b}b' + \overline{a}\overline{a'}\end{pmatrix} = M(aa' - b\overline{b'}, ab' + b\overline{a'}).$$

En conséquence, le produit de deux quaternions est un quaternion et $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

IX. **1.** Calculer les produits deux à deux des matrices E, I, J et K. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.

$\curvearrowright$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

2. La multiplication dans $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

Non, car $IJ \neq JI$, par exemple.

X. Montrer que tout quaternion $q = M(a,b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, est un élément de $GL_2(\mathbb{C})$ dont l'inverse q^{-1} est un quaternion.

Le déterminant de q est

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{vmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \neq 0,$$

car $(a,b) \neq (0,0)$. Donc $q \in GL_2(\mathbb{C})$. De plus :

$$q^{-1} = \frac{1}{|a|^2+|b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = M\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2+|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2+|b|^2}\right) \in \mathbb{H}.$$

XI. Montrer que $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H}, qr = rq\} = \{xE \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$\subseteq$. Soit $q \in \mathbb{H}$, tel que pour tout $r \in \mathbb{H}$, $qr = rq$. Posons $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{aligned} qI &= xI - yE + zK + tJ \\ = Iq &= xI - yE + zK - tK. \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture dans la base (E, I, J, K), $z = t = 0$.

$$\begin{aligned} qJ &= xJ + yK - ZE - tI \\ = Jq &= xJ - yK + zE + tI. \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture dans la base (E, I, J, K), $y = t = 0$. Donc $q = xE$.

$\supseteq$. Si $q = xE$, avec $x \in \mathbb{R}$, alors $q = xI_2$ donc pour tout quaternion r, $qr = rq = xr$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

Soit $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On définit le quaternion conjugué de q, noté q^*, par :

$$q^* = xE - yI - zJ - tK.$$

On définit la partie réelle de q, notée $\mathcal{R}e(q)$, par $\mathcal{R}e(q) = xE$.
On définit la partie imaginaire de q, notée $\mathcal{I}m(q)$, par $\mathcal{I}m(q) = yI + zJ + tK$.
On définit l'ensemble des quaternions purs, noté $\mathbb{H}_{pur}$, par $\mathbb{H}_{pur} = \{q \in \mathbb{H} \mid \mathcal{R}e(q) = 0\}$.

XII. **1.** Soit q un quaternion. Montrer que q^* est la transposée de la matrice obtenue en conjugant tous les coefficients de q.

$$\begin{aligned} q^* &= xE - yI - zJ - tK \\ &= \begin{pmatrix} x-iz & z+it \\ -z+it & x+iy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-iy & -z+it \\ z+it & x+iy \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \overline{x+iy} & \overline{-z-it} \\ \overline{z-it} & \overline{x-iy} \end{pmatrix}^\top. \end{aligned}$$

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $(qr)^* = r^*q^*$.

Par suite, $(qr)^* = (\overline{qr})^\top = (\overline{q}\,\overline{r})^\top = \overline{r}^\top\overline{q}^\top = r^*q^*$.

XIII. Pour tout quaternion q, on pose $N(q) = qq^*$.

1. Montrer que, pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $N(q) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E$.

$$\begin{aligned} N(q) &= (xE + yI + zJ + tK)(xE - yI - zJ - tK) \\ &= x^2E - xyI + xzJ - xtK \\ &+ xyI + y^2E - yzK + ytJ \\ &+ xzJ + yzK + z^2E - ztI \\ &+ xtK - ytI + ztI + t^2E \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E. \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour tous quaternions q, r, $N(qr) = N(q)N(r)$.

On obtient :

$$N(qr) = (qr)(qr)^* = qrr^*q^* = qN(r)q^*.$$

Posons $r = xE + yI + zJ + tK$, avec x, y, z, $t \in \mathbb{R}$. D'après la question XI, $N(r) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E$ et q^* commutent, donc :

$$N(q)N(r) = qq^*N(r) = N(q)N(r).$$

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

On admet qu'on définit une norme euclidienne sur $\mathbb{H}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ q = xE + yI + zJ + tK & \mapsto \quad \|q\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{cases}$$

XIV. Quel est le produit scalaire associé à cette norme euclidienne ?

Si $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ et $q' = x'E + y'I + z'J + t'K \in \mathbb{H}$, avec x, y, z, t, x', y', z', $t' \in \mathbb{R}$:

$$\langle q \mid q' \rangle = xx' + yy' + zz' + tt'.$$

XV. **1.** Montrer que, pour tout quaternion q, $N(q) = \|q\|^2 E$.

Cela provient directement de la question XIII.1.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $\|qr\| = \|q\| \times \|r\|$.

Par la question XIII.2,

$$N(qr) = \|qr\|^2 E = N(q)N(r) = \|q\|^2 \|r\|^2 E.$$

Par unicité de l'écriture dans la base (E, I, J, K), $\|qr\|^2 = \|q\|^2\|r\|^2$. En appliquant la racine carrée aux deux membres, on obtient $\|qr\| = \|q\| \times \|r\|$.

3. En déduire que pour tout quaternion non nul q, $\|q^{-1}\| = \dfrac{1}{\|q\|}$.

Alors $\|qq^{-1}\| = \|q\| \times \|q^{-1}\| = \|E\| = 1$, donc $\|q^{-1}\| = \dfrac{1}{\|q\|}$.

XVI. On considère l'application suivante :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{pur} \\ \overrightarrow{q} = (y, z, t) & \mapsto & q = yI + zJ + tK. \end{array} \right.$$

Le quaternion pur $\psi(\overrightarrow{q})$ est appelé quaternion pur associé au vecteur $\overrightarrow{q}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et est supposé orienté. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. De plus, $\mathbb{H}_{pur}$ est muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que ψ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^3$,

$$\|\psi(\overrightarrow{q})\| = \|\overrightarrow{q}\|.$$

Soit $\overrightarrow{q} = (y, z, t) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$[\|\psi(\overrightarrow{q})\| = \|yI + zJ + tK\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\overrightarrow{q}\|.$$

Donc ψ est une isométrie.

2. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{pur}$, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\mathcal{R}e(q_1 q_2) = -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E$ et que $\mathcal{I}m(q_1 q_2) = \psi(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2})$, où $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$.

Posons $q = y_1 I + z_1 J + t_1 K$ et $q_2 = y_2 I + z_2 J + i_2 K$. Alors :

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= -y_1 y_2 E + y_1 z_2 K - y_1 t_2 J \\ &\quad - z_1 y_2 K - z_1 z_2 E + z_1 t_2 I \\ &\quad + t_1 y_2 J - t_1 z_2 I - t_1 t_2 E \\ &= (-y_1 y_2 - z_1 z_2 - t_1 t_2) E + (z_1 t_2 - t_1 z_2) I \\ &\quad + (t_1 y_2 - y_1 t_2) J + (-z_1 y_2 + y_1 z_2) K. \end{aligned}$$

Par suite, $\mathcal{R}e(q_1 q_2) = -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E$ et $\mathcal{I}m(q_1 q_2)$ est l'image par ψ du vecteur

$$(z_1 t_2 - t_1 z_2, t_1 y_2 - y_1 t_2, -z_1 y_2 + y_1 z_2),$$

qui est $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$.

3. Soit $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $\mathcal{R}e(q^2)$ et $\mathcal{I}m(q^2)$. En déduire q^2.
D'après la question précédente, $\mathcal{R}e(q^2) = -\|q\|^2 E$ et $\mathcal{I}m(q)$ est associé l'image par ψ du vecteur $\overrightarrow{q} \wedge \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$, donc $\mathcal{I}m(q) = 0$. En conséquence, $q^2 = -\|q\|^2 E$.

4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $(aE + bq)(cE + dq)$.

$$\begin{aligned}(aE + bq)(cE + dq) &= acE + (bc + ad)q + bdq^2 \\ &= (ac - bd\|q\|^2)E + (bc + ad)q.\end{aligned}$$

5. Soient q_1 et q_2 deux quaternions purs, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle = 0$ si et seulement si $q_1q_2 + q_2q_1 = 0$.
En effet, par antisymétrie du produit vectoriel et par symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}q_1q_2 + q_2q_1 &= -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E + \psi(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}) \\ &\quad - \langle \overrightarrow{q_2} \mid \overrightarrow{q_1} \rangle E + \psi(\overrightarrow{q_2} \wedge \overrightarrow{q_1}) \\ &= -2\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E.\end{aligned}$$

Donc $\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle = 0$ si et seulement si $q_1q_2 + q_2q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectorielles

On note $U = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = E\}$. Les éléments de U sont appelés quaternions unitaires.

XVII. Montrer que U est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
Comme $E \in U$, U est non vide. Si $q, q' \in U$, alors $N(qq') = N(q)N(q') = E \times E = E$, donc $qq' \in U$. Si $q \in U$, alors $q \neq 0$ car $N(q) = E$ et :

$$N(q^{-1}) = N(q)^{-1} = E^{-1} = E,$$

donc $q^{-1} \in U$. Par suite, U est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

XVIII. Soit $p \in U$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel θ et un quaternion $u \in U \cap \mathbb{H}_{pur}$ tel que

$$p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u.$$

Posons $p = xE + yI + zJ + tK$, avec x, y, z, $t \in \mathbb{R}$. Alors $N(p) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ et $x \in [-1, 1]$. En conséquence, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$.
Si $x^2 = 1$, alors $\sin(\theta) = 0$. De plus, $y^2 + z^2 + t^2 = 0$ et donc $y = z = t = 0$. On prend alors pour u n'importe quel élément de $U \cap \mathbb{H}_{pur}$ et $p = xE = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$.
Si $x^2 \neq 1$, alors $\sin(\theta) \neq 0$. On pose alors

$$u = \frac{yI + zJ + tK}{\sin(\theta)}.$$

Il est immédiat que $u \in \mathbb{H}_{pur}$. De plus :

$$N(u) = \frac{y^2 + z^2 + t^2}{\sin(\theta)^2} = \frac{1 - x^2}{\sin(\theta)^2} = \frac{1 - \cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2} = 1,$$

donc $u \in U$.

2. Vérifier que $p^{-1} = p^* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$.
Comme u est un quaternion pur, $p^* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$. De plus, comme $p \in U$, $N(p) = pp^* = E$ et donc l'inverse de p est p^*.

XIX. Soit $p \in U$. On définit l'application suivante :

$$r_p : \begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & pqp^{-1}. \end{cases}$$

1. Montrer que r_p est une application linéaire.
Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r_p(q_1 + \lambda q_2) &= p(q_1 + \lambda q_2)p^{-1} \\ &= pq_1p^{-1} + p(\lambda q_2)p^{-1} \\ &= pq_1p^{-1} + \lambda pq_2p^{-1} \\ &= r_p(q_1) + \lambda r_p(q_2). \end{aligned}$$

Donc r_p est linéaire.

2. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $||r_p(q)|| = ||q||$.

$$||r_p(q)|| = ||pqp^{-1}|| = ||p|| \times ||q|| \times ||p^{-1}|| = ||p|| \times ||q|| \times ||p||^{-1} = ||q||.$$

3. Soient p_1 et p_2 deux éléments de U. Montrer que $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1p_2}$. En déduire que pour tout $p \in U$, r_p est une bijection d'inverse $r_{p^{-1}}$.
Soit $q \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} r_{p_1} \circ r_{p_2}(q) &= r_{p_1}(p_2qp_2^{-1}) \\ &= p_1p_2qp_2^{-1}p_1^{-1} \\ &= (p_1p_2)q(p_1p_2)^{-1} \\ &= r_{p_1p_2}(q). \end{aligned}$$

Donc $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1p_2}$. En particulier, pour $(p_1, p_2) = (p, p^{-1})$ et (p^{-1}, p) :

$$r_p \circ r_{p^{-1}} = r_{p^{-1}} \circ r_p = r_E = Id_{\mathbb{H}}.$$

Donc r_p est une bijection et son inverse est $r_{p^{-1}}$.

4. Montrer que r_p est égale à l'identité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $p = E$ ou $p = -E$.
Si $p = \varepsilon E$, avec $\varepsilon \in \{1, -1\}$, alors $p^{-1} = p$ et pour tout $q \in \mathbb{H}$:

$$r_p(q) = \varepsilon Eq\varepsilon E = \varepsilon^2 q = q,$$

donc $r_p = Id_{\mathbb{H}}$.
Si $r_p = Id_{\mathbb{H}}$, alors pour tout $q \in \mathbb{H}$, $pqp^{-1} = q$ et donc $pq = qp$. D'après la question XI, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $p = \lambda E$. Comme $p \in U$, $||p|| = 1$ et donc $\lambda^2 = 1$ et finalement $p = E$ ou $-E$.

5. Soient p_1 et p_2 deux quaternions unitaires. Déduire de la question précédente que $r_{p_1} = r_{p_2}$ si et seulement si $p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.
Supposons $r_{p_1} = r_{p_2}$, alors :

$$r_{p_1} \circ r_{p_2}^{-1} = r_{p_1p_2^{-1}} = Id_{\mathbb{H}},$$

donc $p_1p_2^{-1} = \pm E$, d'où $p_1 = \pm p_2$.
Supposons $p_1 = \pm p_2$. Alors $p_1p_2^{-1} = \pm E$, donc

$$r_{p_1p_2^{-1}} = r_{p_1} \circ r_{p_2}^{-1} = Id_{\mathbb{H}}$$

et par suite $r_{p_1} = r_{p_2}$.

XX. On suppose maintenant que p est un quaternion unitaire différent de E et de $-E$. D'après la question XVIII. 1., le quaternion p s'écrit sous la forme $p = \cos(\theta)E+\sin(\theta)u$, où θ est un nombre réel u est un quaternion pur unitaire. On associe à u le vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'application ψ définie dans la question XVI.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note v et w les quaternions purs associés aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Que peut-on dire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?

Il s'agit d'une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $uv = -vu = w$, $uw = -wu = -v$, $u^2 = -E$ et que $u^3 = -u$.

D'après la question XVI. 2,

$$\mathcal{R}e(uv) = -\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0, \qquad \mathcal{I}m(uv) = \psi(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \psi(\overrightarrow{w}) = w.$$

Donc $uv = w$. De même,

$$\mathcal{R}e(vu) = -\langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \rangle = 0, \qquad \mathcal{I}m(vu) = \psi(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}) = \psi(-\overrightarrow{w}) = -w.$$

Donc $vu = -w$. Comme $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe, $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ et on obtient ainsi $wu = v$ et $uw = -v$.

D'après la question XVI. 3, $u^2 = -\|u\|^2 E = -E$ et donc $u^3 = -Eu = -u$.

3. Calculer $r_p(u)$, $r_p(v)$ et $r_p(w)$.

$$\begin{aligned}
r_p(u) &= (\cos(\theta)E + \sin(\theta)u)u(\cos(\theta)E - \sin(\theta)u)\\
&= \cos^2(\theta)u - 2\cos(\theta)\sin(\theta)u^2 - \sin^2(\theta)u^3 + \sin(\theta)\cos(\theta)u^2\\
&= (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)u\\
&= u,\\
r_p(v) &= (\cos(\theta)E + \sin(\theta)u)v(\cos(\theta)E - \sin(\theta)u)\\
&= \cos(\theta)^2 v - \cos(\theta)\sin(\theta)(uv - vu) - \sin(\theta)^2 uvu\\
&= \cos(\theta)^2 v - 2\cos(\theta)\sin(\theta)w - \sin(\theta)^2 wu\\
&= (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)v + 2\cos(\theta)\sin(\theta)w\\
&= \cos(2\theta)v + \sin(2\theta)w,\\
r_p(w) &= (\cos(\theta)E + \sin(\theta)u)w(\cos(\theta)E - \sin(\theta)u)\\
&= (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)w - 2\cos(\theta)\sin(\theta)v\\
&= -\sin(2\theta)v + \cos(2\theta)w.
\end{aligned}$$

4. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ notée R, dont on précisera l'axe et l'angle, telle que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

La matrice de r_p dans la base orthonormée directe (u, v, w) de $\mathbb{H}_{pur}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc la rotation recherchée est l'axe d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$ et d'angle 2θ.

XXI. Soit R une rotation vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'axe la droite D dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{d}$ et d'angle ϕ. Montrer qu'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

Soit u le quaternion pur image par ψ de $\overrightarrow{d}$. On pose

$$p = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)E + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)u.$$

Il s'agit bien d'un élément de U et, d'après la question précédente, p convient.

XXII. **Application**. Soient R_1 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe engendré par $(1,-1,-1)$ et R_2 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π et d'axe engendrée par $(0,1,0)$. Montrer que $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$ sont des rotations dont on précisera les axes et les angles.

D'après la question précédente, R_1 correspond au quaternion

$$p_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)E + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{I-J-K}{\sqrt{3}} = \frac{E+I-J-K}{2}$$

et R_2 correspond au quaternion

$$p_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)J = J.$$

De plus, d'après la question XIX.3, $R_2 \circ R_1$ correspond au quaternion

$$p_2p_1 = \frac{J-K+E-I}{2} = \frac{1}{2}E + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{-I+J-K}{\sqrt{3}}.$$

Il s'agit donc de la rotation d'axe dirigé par $(-1,1,-1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Enfin, $R_1 \circ R_2$ correspond au quaternion

$$p_1p_2 = \frac{J+K+E+I}{2} = \frac{1}{2}E + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{I+J+K}{\sqrt{3}}.$$

Il s'agit donc de la rotation d'axe dirigé par $(1,1,1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Problème n° 2

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\binom{n}{k}$.

On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k\\ &= 1 - x^{n+1}.\end{aligned}$$

Comme $x \neq 1$, $1 - x \neq 0$ et on obtient le résultat en divisant par $1 - x$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

sont donc égales. Elles sont toutes les deux dérivables et leurs dérivées sont égales. Par suite, pour tout nombre réel $x \neq 1$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = g'(x) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

3. Soit $x \in]-1;1[$. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

Comme $|x| < 1$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (n+1)x^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} nx^{n+1} = 0,$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

On pose $a_n = \binom{n}{k}$. Ces nombres réels étant tous non nuls, on peut utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-k}.$$

En conséquence :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Le rayon de convergence de la série $S_k(x)$ est donc $1^{-1} = 1$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1;1[$ et que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

La série entière S_k est dérivable sur l'intérieur de son intervalle de convergence $]-1;1[$ et pour $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
S_k'(x) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1}\\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)x^{n-k-1}\\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k-1)!}x^{n-k-1}\\
&= (k+1)\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}x^{n-k-1}\\
&= (k+1)S_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour k entier naturel, soit $\mathcal{P}(k)$ la propriété :

$$\forall x \in]-1;1[,\ S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour tout $x \in]-1;1[$,$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Pour tout $x \in]-1;1[$, d'après la question précédente :

$$S_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}S_k'(x) = \frac{k+1}{k+1}\frac{1}{(1-x)^{k+2}} = \frac{1}{(1-x)^{k+2}}.$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Soit $x \in]-1\,;1[$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\binom{n}{1}$ et de $\binom{n}{2}$.

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$n^2 = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1},$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) x^{n-1} \\
&= 2x \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^{n-1} \\
&= 2xS_2(x) + S_1(x) \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1+x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

III. Application : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur Ω, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

D'après la question II.3, cette série converge car $|1-p| < 1$ et converge absolument car c'est une série à termes positifs. Donc $E(X)$ existe. De plus :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = pS_1(1-p) = \frac{p}{(1-1+p)^2} = \frac{1}{p}.$$

2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}.$$

D'après la question II.4, cette série converge absolument (car elle est à termes positifs) et donc $E(X^2)$ existe. De plus :

$$E(X^2) = p\frac{1+1-p}{(1-1+p)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.
Comme $E(X^2)$ et $E(X)$ existe, $V(X)$ existe et vaut :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.
$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « le joueur A_1 touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

$$(X_1 = k) = \overline{E_1} \cap \ldots \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k.$$

VI. En déduire la loi de X_1.
Les événements E_i sont supposés indépendants, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(\overline{E_1}) \ldots \mathbb{P}(\overline{E_{k-1}})\mathbb{P}(E_k) = q_1^{k-1} p_1 = (1-p_1)^{k-1} p_1.$$

VII. **1.** Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.

$$\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} p_1 q_1^{n-1} = p_1 q_1^k \sum_{n=0}^{+\infty} q_1^n = \frac{p_1 q_1^k}{1-q_1} = q_1^k.$$

2. Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{(X_1>m)}(X_1 > n+m) = \mathbb{P}(X_1 > n).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_1>m)}(X_1 > n+m) &= \frac{\mathbb{P}((X_1 > m) \cap (X_1 > n+m))}{\mathbb{P}(X_1 > m)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 > n+m)}{\mathbb{P}(X_1 > m)} \\
&= \frac{q_1^{n+m}}{q_1^m} \\
&= q_1^n \\
&= \mathbb{P}(X_1 > n).
\end{aligned}$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

On montrerait de même que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = p_2 q_2^{k-1}.$$

Par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= p_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q_1 q_2)^{k-1} \\ &= \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}.\end{aligned}$$

IX. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$.

Par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 > X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 > k) \cap (X_2 = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} q_1^k q_2^{k-1} \\ &= q_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q_1 q_2)^{k-1} \\ &= \frac{q_1 p_2}{1 - q_1 q_2}.\end{aligned}$$

X. Que vaut $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$?

Par symétrie entre X_1 et X_2, $\mathbb{P}(X_2 > X_1) = \dfrac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}$.

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur A_1 pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.

On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k)$. On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.

Comme A_2 tire n fois, si $k > n$, $\mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k) = 0$. Si $k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1}p^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}q^{2n-2k}$.

On utilise le système complet d'événements $(X_1 = n)_{n\geqslant 1}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 = n)\mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k)\\ &= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} pq^{n-1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^{k+1}q^{2n-k-1}\\ &= q^{k-1}p^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}q^{2n-2k}.\end{aligned}$$

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

D'après la question II :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = k) &= q^{k-1}p^{k+1}S_k(q^2)\\ &= \frac{q^{k-1}p^{k+1}}{(1-q^2)^{k+1}}\\ &= \frac{q^{k-1}p^{k+1}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}}\\ &= \frac{q^{k-1}p^{k+1}}{p^{k+1}(1+q)^{k+1}}\\ &= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}\\ &= \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.\end{aligned}$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(G = k) = \frac{1}{(1+q)^2}\sum_{k=1} k\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2}S_1\left(\frac{q}{q+1}\right).$$

Comme $0 < q < 1$, $0 < \dfrac{q}{1+q} < \dfrac{1}{2}$. Donc cette série converge absolument. Donc G possède une espérance et :

$$E(G) = \frac{1}{(1+q)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2} = \frac{1}{(1+q-q)^2} = 1.$$

En moyenne, l'archer 2 touche une seule fois sa cible, tout comme l'archer 1. Ceci provient du fait que $p_1 = p_2$.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q \leqslant 1$.
Comme Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p = q$. Donc $0 \leqslant q \leqslant 1$.
De plus, par hypothèse sur Y, $q > 0$.

XIII. Montrer que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geqslant m) &= \mathbb{P}_{(Y \geqslant n)}(Y \geqslant m+n)\\ &= \frac{\mathbb{P}((Y \geqslant n+m) \cap (Y \geqslant m))}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y \geqslant n+m)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente pour $m = 1$,

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(Y \geqslant n)\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q\mathbb{P}(Y \geqslant n),$$

donc $u_{n+1} = qu_n$. La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison q.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = q^n \mathbb{P}(Y \geqslant 0) = q^n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n+1)$.
Les événements $(Y \geqslant n+1)$ et $(Y = n)$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = \mathbb{P}((Y = n) \cup (Y \geqslant n+1)) = \mathbb{P}(Y = n) + \mathbb{P}(Y \geqslant n+1),$$

d'où le résultat.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.
D'après la question XIV.2,

$$\mathbb{P}(Y = n) = q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) = pq^n.$$

5. En déduire que q est différent de 1.

Si $q = 1$, alors $p = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = 0$. Par suite :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc $q < 1$.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y + 1$.

Posons $Z = Y + 1$. Alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = pq^{n-1}.$$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Si Y est une loi sans mémoire, d'après la question XV, $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q \in]0\,;1[$. Réciproquement, si $Y + 1$ suit une une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q \in]0\,;1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = pq^n$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} pq^k = \frac{pq^n}{1 - q} = q^n,$$

car $0 < q < 1$. Par suite, si $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{(Y \geqslant n)}(Y \geqslant m + n) = \frac{\mathbb{P}(Y \geqslant n + m)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)} = \frac{q^{n+m}}{q^n} = q^m = \mathbb{P}(Y \geqslant m).$$

Donc Y est sans mémoire.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n + 1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

$$1 - \lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z \neq n) = \frac{\mathbb{P}((Z \geqslant n) \cap (Z \neq n))}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n + 1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

Comme λ_n est la probabilité d'un événement, $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$. Si $\lambda_n = 1$, alors $\mathbb{P}(Z_n \geqslant n + 1) = 0$, ce qui est exclu. Donc $\lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) &= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(Z \geqslant k+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant k)}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Z \geqslant k)}{\prod_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z \geqslant k)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}{\mathbb{P}(Z \geqslant 0)}\\ &= \mathbb{P}(Z \geqslant n).\end{aligned}$$

XVIII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k) = 1-\mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

$$1-\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \mathbb{P}(Z<n) = \mathbb{P}(Z \leqslant n-1) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k).$$

2. En déduire que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

donc $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1-1 = 0$.

3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\ln(1-\lambda_n)$?

D'après les questions XVII.3 et XVIII.2,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(1-\lambda_k) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k)\right)\\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\ln(\mathbb{P}(Z \geqslant n)) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\ln(x)\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Cette série diverge.

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n$?

Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0, cette série diverge grossièrement. Si $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, cette suite à termes positifs est équivalente à la suite $-\ln(\lambda(1-\lambda_n))_{n\geqslant 0}$, donc les séries $\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n$ et $-\sum_{n\geqslant 0}\ln(1-\lambda_n)$ sont de même nature. D'après la question précédente, elles divergent.

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n = c$. Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.
C'est la question XVII.2.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.
D'après la question XVII.3,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-c) = (1-c)^n.$$

3. Montrer que c est non nul.
Si $c = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1$. D'après la question XVIII.2,

$$1 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) = 0.$$

On aboutit à une contradiction, donc $c > 0$.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.
Le taux de panne de la variable aléatoire Z est constant si, et seulement si, $Z+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.
$\Longrightarrow$: d'après XIX.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z \geqslant n) = q^n$, avec $q = 1-c$ et donc $0 < q < 1$. On reprend alors le raisonnement de la question XIV.
$\Longleftarrow$: Alors

$$\mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n) = \frac{\mathbb{P}(Z = n)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(Z+1 = n+1)}{\mathbb{P}(Z+1 \geqslant n+1)} = \frac{pq^n}{q^n} = p.$$

Le taux de panne est donc constant.