CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ AGRICOLE **C A P E S A**

CONCOURS D'ACCÈS à la 2^e^ catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés

SESSION 2013

Concours : EXTERNE
Section : **MATHÉMATIQUES**

<u>PREMIÈRE ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ</u>

Culture disciplinaire

(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte sept pages.

Les différentes parties peuvent être traitées de manière indépendante, toutefois, les résultats de la première question de la partie 1 pourront être réinvestis dans les deux autres parties.

Notations

Dans la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :
$\mathcal{S}_n(K)$ l'ensemble des suites numériques à valeurs dans K.
$\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans K .
$\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K à n lignes et p colonnes (p entier naturel non nul) .

I_n désigne la matrice unité et $0_{\mathcal{M}_n(K)}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(K)$.
$0_{\mathcal{M}_{n,p}(K)}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A est inversible, on note A^{-1} son inverse.

Rappels, prérequis

Si $A \in \mathcal{M}_n(K), A^0 = I_n$.
$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et telle que $X(\Omega)$ soit un ensemble infini dénombrable que l'on notera $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

∘ On dit que X admet une espérance mathématique, que l'on note $E(X)$ si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et on a alors : $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

∘ Soit f une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente et on a alors : $E\left(f(X)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.

∘X possède une variance, notée $V(X)$, si et seulement si X^2 possède une espérance et dans ce cas $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$. (formule de Huygens).

Partie 1 : suites numériques géométriques

Dans $\mathcal{S}_n(K)$, on appelle suite géométrique de raison q appartenant à K, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.

1. Résultats de base

   On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(K)$ de premier terme u_0 donné et de raison q non nulle.

a. Expression du terme général en fonction de n

Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$, puis en déduire, pour n et p dans $\mathbb{N}, u_n$ en fonction de u_p et de q.

b. Somme de termes consécutifs

(i) Démontrer que pour tout couple (a, b) de K^2, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (formule de l'identité géométrique)

(ii) En déduire que, lorsque $q \neq 1$, pour n et p dans $\mathbb{N}, p < n$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

(iii) Exprimer $\sum_{k=p}^{n} u_k$ en fonction de n, p et u_p dans le cas où $q = 1$.

c. Limite de $(q^n), q \in \mathbb{R}$

(i) Soit $q \in]1, +\infty[$, on pose $q = 1 + a$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq na$ puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$.

(ii) Soit $q \in]-1, 1[$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, -|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ puis, à l'aide de la question précédente, en déduire $\lim_{n\to+\infty} q^n$.

(iii) Justifier que si $q \leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

(iv) Dresser un tableau donnant $\lim_{n\to+\infty} q^n$, selon la valeur du réel q.

2. Une application : écriture fractionnaire d'un nombre rationnel connu par son développement décimal périodique

Pour tout nombre réel x, on appelle développement décimal illimité de x toute suite (d_n) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $d_0 \in \mathbb{Z}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$
- $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$

On écrit alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$

Si x est un nombre rationnel, alors la suite (d_n) est périodique à partir d'un certain rang. Dans ce cas, on peut utiliser une notation simplifiée.

Par exemple, $2,34137137137...$ se note $2,34\underline{137}$ (on souligne ce qui se répète).

L'objectif est, connaissant le développement décimal d'un nombre rationnel x, de retrouver une écriture fractionnaire de celui-ci.

a. Exemple 1 : soit $x = 4,\underline{37}$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $x_n = 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{37}{10^{2k}}$.

Etablir un lien entre x et x_n, puis en déduire une forme fractionnaire de x.

b. Exemple 2 : soit $y = 1,0\underline{342}$. Déterminer une forme fractionnaire de y.

c. Exemple 3 : soit $z = 0,\underline{9}$. Déterminer une forme fractionnaire de z. Quelle remarque ce dernier exemple vous inspire-t-il ?

3. Suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(K)$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$, avec q et r dans $K, q \neq 1, r \neq 0$.

a. Expression du terme général en fonction de n

On reprend les notations de la définition précédente.

(i) Déterminer le réel L tel que $L = qL + r$.

(ii) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - L$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

(iii) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

b. Application

Une machine à sous a été programmée pour fonctionner de la manière suivante :

Un joueur a une chance sur 200 de gagner à son premier essai.

Etant donné un entier naturel non nul n,

si ce joueur perd à l'essai n, il a une chance sur 100 de gagner à l'essai suivant,

s'il gagne à l'essai n, il a une chance sur 1000 de gagner à nouveau à l'essai suivant.

On définit l'évènement A_n : un joueur donné gagne au $n^{ème}$ essai et on note u_n sa probabilité.

(i) Décrire l'espace probabilisé.

(ii) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, $u_{n+1} = -\dfrac{9}{1000}u_n + \dfrac{1}{100}$.

(iii) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

(iv) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ puis en donner une interpétation.

Partie 2 : suites matricielles

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, on appelle suite matricielle géométrique de raison matricielle A appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$, toute suite de matrices (U_n) telle que, pour tout n de $\mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

1. Résultats généraux

a. Soient A, B et P, trois éléments de $\mathcal{M}_n(K)$, avec P inversible, telles que $A = PBP^{-1}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(IK)$.

A quelle condition M est-elle inversible ? Dans le cas où M est inversible, exprimer son inverse en fonction de a, b, c et d.

2. Résultats de base

   On considère la suite matricielle géométrique (U_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ de premier terme U_0 donné et de raison A appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$.

   a. Expression du terme général en fonction de n
      Exprimer,pour tout n de $\mathbb{N}, U_n$ en fonction de U_0 et de A.

   b. Somme de termes consécutifs

      (i) Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, et pour tout p de $\mathbb{N}^*$,
      $I_n - A^{p+1} = (I_n - A)\sum\limits_{k=0}^{p} A^k$

      (ii) On suppose que $I_n - A$ est inversible, en déduire une nouvelle expression de $\sum\limits_{k=0}^{p} A^k$, puis exprimer $\sum\limits_{k=0}^{p} U_k$ en fonction de I_n, A, p et U_0.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

   On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2, toute suite (u_n) de $\mathcal{S}_n(K)$ telle qu'il existe deux éléments a et b de K $(b \neq 0)$ tels que pour tout entier n , $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

   a. Ecrire un algorihtme permettant de calculer u_n, pour $n \geq 2$, connaissant a, b, u_0 et u_1.

   b. Exemple 1 : soit (u_n) la suite récurrente linéaire d'ordre 2 de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par :
      $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.
      On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

      (i) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

      (ii) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés dont la première composante est égale à 1.

      (iii) En déduire l'existence de deux matrices P et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec P inversible de première ligne composée de 1 et D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

      (iv) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de U_n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Exemple 2 : soit (v_n) la suite récurrente linéaire d'ordre 2 de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par :
      $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et telle que $v_0 = 1$ et $v_1 = 9$.
      On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

      (i) Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}, V_{n+1} = BV_n$.

      (ii) Montrer que B n'est pas diagonalisable.

      (iii) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible, puis calculer $T = Q^{-1}BQ$.

      (iv) Déterminer la matrice $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I_2 + J$, puis montrer que J est nilpotente d'ordre 2.

      (v) Calculer T^n pour tout n de N.

      (vi) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de V_n, puis de v_n en fonction de n.

4. Suites arithmético-géométriques

On appelle suite matricielle arithmético-géométrique, toute suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K), A \neq I_n, B \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(IK)}$.

a. Expression du terme général en fonction de n

On reprend les notations de la définition précédente.

(i) Démontrer que si $I_n - A$ est inversible, alors il existe une unique matrice $L \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ telle que $L = AL + B$. Exprimer L en fonction de B et de l'inverse de $I_n - A$.

(ii) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n - L$. Démontrer que (V_n) est une suite matricielle géométrique dont on précisera la raison.

(iii) En déduire l'expression de V_n en fonction de A^n, U_0 et L.

b. Application

On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 1 \\ w_{n+1} = v_n + 2w_n - 2 \end{cases}$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

(i) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(K)$ telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$

(ii) Déterminer la matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(K)$ telle que $L = AL + B$.

(iii) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$

(iv) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de U_n, puis de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

(v) Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{p} U_k$ en fonction de I_n, A, B, U_0 et $C = (I_n - A)^{-1}$

Partie 3 : série et loi géométriques

1. Séries géométriques

On appelle série géométrique réelle, toute série de terme général q^n, avec $q \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et donner $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ dans le cas où $|q| < 1$.

On prend désormais q tel que $|q| < 1$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. en remarquant que $n^p |q|^n = n^p \sqrt{|q|}^n \times \sqrt{|q|}^n$, démontrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^p q^n$ est absolument convergente.

(c) En utilisant l'égalité $\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$, démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

(d) De même, en développant la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 q^{k+1}$, démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \dfrac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

2. Une fausse série géométrique

Soient n un nombre entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(x) = n$ admet une unique solution notée a_n .

(b) Pour tout entier naturel non nul n , comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(1)$, puis en déduire que $0 \leq a_n < 1$.

(c) Montrer que la suite (a_n) est strictement croissante, puis en déduire qu'elle converge. On note L sa limite.

(d) On suppose que $L \neq 1$

(i) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(a_n) = \dfrac{1 - a_n^{n+1}}{1 - a_n}$

(ii) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} (f_n(a_n)) = \dfrac{1}{1-L}$

(iii) Que peut-on en conclure ?

3. Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$; on pose $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire réelle X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ suit la loi géométrique de paramètre p si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, P(X = k) = pq^{k-1} \end{cases}$$

(a) Vérifier que l'on a bien défini la loi de probabilité d'une variable discrète.

(b) Démontrer que si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors X possède une espérance mathématique et une variance que l'on calculera.

(c) Application

En France, pour 378 naissances de filles, on a 396 naissances de garçons.

Dans une maternité, on considère, à partir d'une date donnée, la variable aléatoire X égale au nombre de naissances observées avant la naissance de la première fille.

(i) Justifier que X suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

(ii) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,99$.

(iii) Préciser et interpréter $E(X)$.