Écrit de mathématiques

Comme les années précédentes, le sujet écrit de Mathématiques ATS se divisait en quatre exercices indépendants. Les exercices eux-mêmes pouvaient parfois se divisaient en parties plus ou moins autonomes.

L'épreuve couvre comme d'habitude une large partie du programme d'ATS et les candidats peuvent profiter de la longueur de sujet pour privilégier les parties où ils se sentent le plus à l'aise. On observe généralement que les parties les plus traitées sont celles ayant à voir avec l'algèbre linéaire et les séries de Fourier. Les autres thèmes ont permis de faire la différence entre les copies « moyennes » et les « bonnes » copies. Le jury regrette cependant que l'algorithmique et la géométrie soient en grande partie délaissées.

La figure 1 présente l'histogramme des notes obtenues par les 889 candidats ayant composé. La moyenne s'établit à 10,00 et l'écart-type à 3,94.

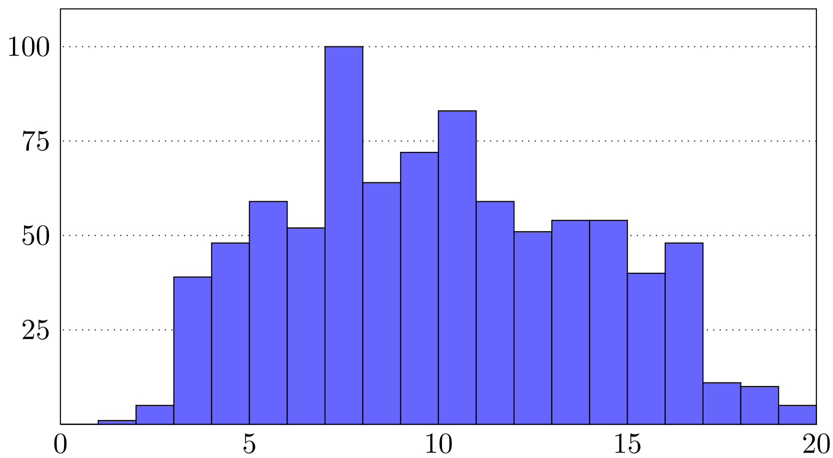

FIGURE 1 – Histogramme des notes de l'épreuve écrite (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

Exercice 1

La partie A, dans l'ensemble très bien traitée, reprenait des thèmes d'algèbre linéaire déjà posés lors des précédentes sessions (étude de matrices 3×3). La partie B, moins classique, a été délaissée par les candidats.

Partie A – Étude d'une matrice

1. (a) Une petite moitié des candidats a malmené cette question, soit en affirmant à tort que A est symétrique (certains déduisant au passage qu'elle est diagonalisable, ce qui n'était pas la question, quand d'autres invoquent le théorème spectral pour conclure que A est symétrique !). On rencontre des erreurs manifestes sur la définition de matrice

symétrique (par exemple $\det A = 0 \implies A$ symétrique, ou encore la confusion avec les symétries, vérifiant $A^2 = I$).

Même chez les candidats ayant répondu correctement, on sent une fragilité sur la notion de matrice symétrique, beaucoup se sentent en effet l'obligation de nuancer maladroitement leurs réponses en distinguant dans la foulée plusieurs notions de symétrie de la matrice, suivant tel ou tel « axe de symétrie ».

(b) La plupart du temps, la non-inversibilité de A est établie correctement (bien que dans une minorité de copies, le caractère inversible ou non de A est déduit par la seule observation de ses termes diagonaux). Cependant, les liens entre inversibilité et valeurs propres gagneraient à être mieux connus.

2. (a) Cette question est dans l'ensemble bien traitée. À noter que de nombreux candidats utilisent, pour une raison inexpliquée, le symbole $\iff$ au lieu de $=$ au cours des différentes étapes du calcul du polynôme caractéristique.

   (b) De même, cette question classique est bien traitée. On peut regretter de voir que de nombreux candidats cherchent les solutions de $\lambda^2 - 4 = 0$ en passant par le discriminant...

   (c) La rédaction et les arguments sont parfois maladroits, ce qui peut cacher des incompréhensions. Il n'est pas rare de lire que « la matrice A est scindée à racines simples ». La partie « à racines simples » peut également manquer. Par ailleurs, mentionner l'existence de trois valeurs propres n'est pas suffisant si l'on ne rappelle pas l'ordre de la matrice.

3. Question dans l'ensemble bien traitée.
4. Question dans l'ensemble bien traitée. Quelques candidats ignorent la contrainte imposée par l'énoncé sur la première ligne de Q.
5. Les candidats ont perdu pied dans cette question, moins classique. Très souvent, ils répondent en attribuant à a, b et c des valeurs arbitraires.
6. On observe que beaucoup de candidats pensent qu'une famille de trois vecteurs est libre lorsque ses éléments sont deux à deux non colinéaires.
7. Dans l'ensemble, cette question a été très peu abordée.

Partie B – Étude d'un endomorphisme

1. Grosso modo, les candidats se répartissent en trois tiers sur cette question de cours : un tiers répondant correctement, un autre tiers abstentionniste et enfin un dernier tiers qui propose des réponses souvent farfelues (parfois la dimension $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est même pas exprimée en fonction de n).
2. (a) Le vocabulaire traduit ici une incompréhension des concepts maniés, à l'instar de l'expression « application stable par addition et multiplication » pour décrire une application linéaire. Par ailleurs, beaucoup de candidats vérifient inutilement que $f_n(0) = 0$.

   (b) Trop souvent, les expressions de $f_n(1)$ et $f_n(X^{n-1})$ ne sont pas simplifiées.

   (c) Les justifications sont souvent absentes à cette question.
3. Cette question a été très mal traitée. Notamment, les candidats ont fréquemment proposé pour la matrice représentative d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$!
4. Les deux dernières questions de cette partie ont été à peine traitées.
5.

Exercice 2

Partie A – Deux équations différentielles

1. (a) Les candidats n'ont pas vu que l'équation à résoudre $y'' = 0$ était particulièrement simple, on obtient les solutions $x \mapsto ax + b$ en primitivant deux fois la fonction nulle. Il était maladroit d'utiliser la méthode générale de résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients constants, et ceux qui se sont engagés dans cette voie se sont souvent embourbés (dans la même veine, beaucoup de candidats ont cherché à résoudre l'équation caractéristique $r^2 = 0$ en passant par le calcul du discriminant, là aussi sans recul). À noter que des candidats ont cherché une « solution particulière » à cette équation homogène.
   (b) Des candidats reconnaissent l'équation de l'oscillateur harmonique, vue en Physique, et donnent les solutions en fonction d'une pulsation ω qu'ils ne cherchent pas à relier au paramètre α. Dans les calculs, on rencontre fréquemment des $\cos(\mathrm{i}\sqrt{\alpha}t)$ ou $\sin(\mathrm{i}\sqrt{\alpha}t)$.
2. (a) Il fallait à la fois appliquer les règles de dérivation d'un produit et d'une composée de fonctions. Le jury a remarqué qu'elles sont mal maîtrisées par les candidats.
   (b) Question bien traitée par les candidats ayant réussi la question précédente.
   (c) L'équivalence logique était systématiquement maltraitée par les candidats.
3. Les deux sous-questions ont été moins traitées, et souvent assez mal. À nouveau, le jury regrette que les candidats connaissent assez mal la typologie des équations différentielles, puisqu'il était fréquent ici de poser une « équation caractéristique » alors l'équation différentielle étudiée était à coefficients non constants.

Partie B – Une équation aux dérivées partielles

1. Les candidats semblent supposer que, pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, « être fermé » est le contraire de « être ouvert », puisqu'ils ne répondent souvent qu'à une seule des questions posées.
2. (a) Certains candidats justifient le caractère $\mathscr{C}^2$ de la fonction f en évoquant des compositions de fonctions « usuelles », alors que l'expression de la fonction v intervenant dans la définition de f était inconnue. D'autres pensent que f est polynomiale.
   (b) Malheureusement, il était fréquent que des candidats interprètent l'évaluation $v(x^2 + y^2 + z^2)$ comme un produit, d'où des réponses du type
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = v(2x) + v'(x^2 + y^2 + z^2)$$
   La fonction v étant à une variable, c'était un non-sens de la dériver partiellement.
   (c) En acceptant l'expression de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ donnée dans l'énoncé, les candidats ont pu deviner, par symétrie, les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
   (d) Question en général bien traitée.
3.
4. Question très rarement traitée.

Exercice 3

1. Cette question est en général assez bien traitée. Quelques candidats montrent que f est impaire en se contentant de constater que $f(-\pi) = -f(\pi)$.

2. (a) Certains candidats déduisent par de longs calculs que les coefficients a_n sont nuls, même s'ils avaient trouvé précédemment la bonne parité de f.

   (b) Les candidats comprennent qu'il est nécessaire d'effectuer une double intégration par parties, mais parviennent moins souvent au résultat correct.

   (c) Idem.

3. (a) Quasiment aucun candidat ne pense à considérer les points de discontinuité de f, ceux qui tentent cette question font comme si l'expression de f sur $]-\pi, \pi[$ valait en tout point.

   (b) Cette question révèle un manque de rigueur des candidats. Sur la forme, il est assez maladroit d'évoquer d'abord un théorème, puis de vérifier seulement après que ses hypothèses soient satisfaites. Il est souvent fait mention d'une convergence dans des phrases mal écrites, sans sujet grammatical. Sur le fond, les candidats ne font pas le lien avec le résultat de la question précédente, peut-être parce qu'ils n'ont pas compris dans l'ensemble ce qu'est la régularisée d'une fonction. Beaucoup inventent une continuité de f, pour justifier que $f = \tilde{f}$, alors que cette égalité était donnée à la question précédente !

4. (a) Quelques candidats cherchent à appliquer le théorème de Dirichlet qu'ils viennent d'utiliser à la question précédente, peut-être par automatisme.

   (b) Certains candidats identifient que la question porte sur une série télescopique. Pourtant, la définition de somme d'une série, comme limite de sommes partielles, est quasiment absente des raisonnements.

   (c)

5. (a)

   (b) Des candidats, qui connaissaient que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ont parfois forcé les calculs pour parvenir à la bonne conclusion.

Exercice 4

Parmi la minorité des candidats ayant attaqué l'une des deux questions d'algorithmique, une petite moitié parvient à donner des réponses satisfaisantes. Nous citons deux types de réponse, qui trahissent une incompréhension profonde des algorithmes par certains candidats.

1. `return` $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. `return` $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5

Hormis la première partie, portant sur les nombres complexes, les candidats ont encore une fois fait l'impasse sur les problèmes de géométrie (Parties B et C). Les complexes ont posé beaucoup de difficulté, peut-être parce qu'ils sont là dans un contexte inhabituel. Certains candidats placent $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ dans $\mathbb{R}^+$. Les exponentielles de nombres complexes sont maltraitées. On observe pêle-mêle : des modules $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 0$; des ω^3 non simplifiés dans les calculs, alors que l'énoncé précise que $\omega^3 = 1$; le module d'un nombre complexe qui est lui-même un nombre complexe (non réel) ; des confusions entre le conjugué et l'opposé d'un nombre complexe.