Écrit de mathématiques

Comme les années précédentes, le sujet écrit de Mathématiques ATS se divisait en quatre exercices indépendants. Les exercices 1 et 3 se divisaient eux-mêmes en parties plus ou moins autonomes.

L'épreuve couvre comme d'habitude une large partie du programme d'ATS et les candidats peuvent profiter de la longueur de sujet pour privilégier les parties où ils se sentent le plus à l'aise. On observe généralement que les parties les plus traitées sont celles ayant à voir avec l'algèbre linéaire et les séries de Fourier. Les autres thèmes ont permis de faire la différence entre les copies « moyennes » et les « bonnes » copies. Le jury regrette cependant que l'algorithmique et la géométrie soient en grande partie délaissées.

Cette année, le taux d'absentéisme s'élevait à 11,4 %. On rappelle que l'absence à une épreuve écrite vaut élimination du concours. La figure 1 présente l'histogramme des notes obtenues par les 889 candidats ayant composé. La moyenne s'établit à 9,25 et l'écart-type à 4,01.

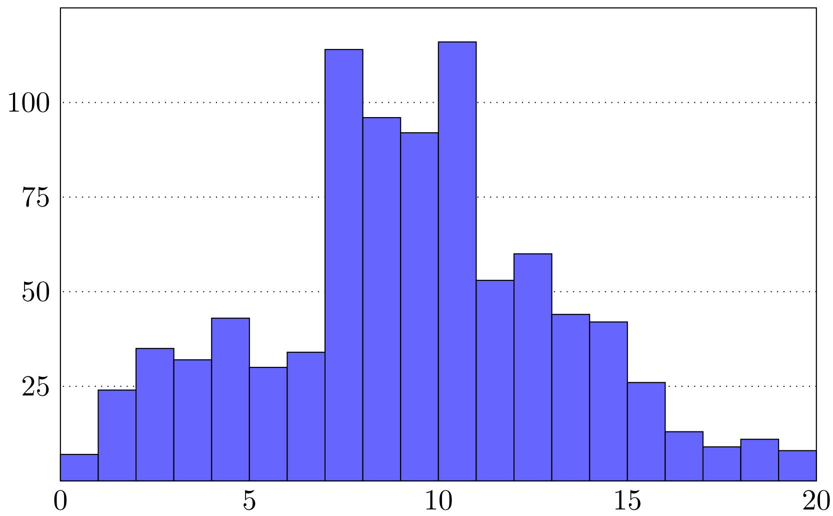

Figure 1 – Histogramme des notes de l'épreuve écrite (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

Exercice 1

La partie A, dans l'ensemble très bien traitée, reprenait des thèmes d'algèbre linéaire déjà posés lors des précédentes sessions (étude de matrices 3×3). La partie B, moins classique, a été délaissée par les candidats.

Partie A – Réduction

1. Dans l'ensemble la question est bien traitée. Le développement du déterminant est souvent correct. On rencontre parfois des réponses aberrantes, comme un polynôme caractéristique du mauvais degré (1 ou 2).

2. Les réponses données à cette question sont presque toujours cohérentes avec celles de la question précédente.
3. Dans un grand nombre de copies, on trouve que la matrice A est diagonalisable car symétrique réelle, contre toute apparence ! Les notions de diagonalisabilité, trigonalisabilité, symétrie d'une matrice, sont mélangées.
4. Un nombre non négligeable de candidats trouve que la matrice représentative de f est A^T, au lieu de A. Peut-être remplissent-ils cette matrice représentative ligne par ligne.
5. Attention là aussi aux réponses aberrantes, le rang d'une matrice 3×3 est nécessairement un entier compris entre 0 et 3. Dans une copie, on trouve même $\mathrm{rg}(A) = -4$! Quelques candidats confondent le rang et la trace d'une matrice.
6. Certains candidats ont traité la question 6 avant la question 5. Cet enchaînement était possible et n'était pas pénalisé. Dans la grande majorité des copies, il manquait l'argument « dimension finie » pour déduire l'injectivité, et même la bijectivité de f à partir de sa surjectivité. Enfin, certains candidats confondent les notions d'injectivité et de diagonalisabilité.
7. Les candidats arrivent souvent à montrer que (e_1', e_2') forme une famille libre. Certains d'entre eux prennent la peine de vérifier que les vecteurs e_1' et e_2' sont bien dans F. Cependant, rares sont ceux qui justifient que F est de dimension 2, le lien avec les espaces propres n'est presque jamais fait.
8. (a) Dans l'ensemble cette question est bien traitée.
   (b) Cette question a été rarement traitée. Ceux qui l'ont fait ont souvent pensé à calculer l'image des nouveaux vecteurs, mais ont rarement décomposé ces images sur la nouvelle base.

Partie B – Étude d'une suite de matrices

1. Cette question est presque toujours traitée.
2. Souvent les candidats calculent directement la matrice inverse A^{-1} au lieu d'utiliser la question précédente : opérations sur les lignes ou les colonnes, utilisation de la comatrice, inversion d'un système.
3. La justification manque souvent de rigueur. Beaucoup de candidats pensent que la non nullité de A et I suffit pour justifier qu'on puisse identifier les coefficients α, α' d'une part et β, β' d'autre part. Ceux qui s'en sortent le mieux sont ceux qui écrivent les coefficients des matrices $\alpha A + \beta I$ et $\alpha' A + \beta' I$ puis obtiennent un système.
4. La récurrence quand elle est entamée est souvent bien menée. Beaucoup de candidats oublient de montrer l'unicité.
5. On rencontre beaucoup d'erreurs de calcul.
6. Un petit nombre de candidats est parvenu à énoncer correctement la conjecture.

Exercice 2

Cet exercice est en général apprécié des candidats. Cependant, beaucoup gagneraient à acquérir une compréhension plus fine des séries de Fourier, qui va au-delà d'un simple exercice d'intégration (calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique).

1. Cette question est presque toujours bien traitée. Cependant, des candidats comprennent que la fonction f est constante sur $[0\,, \pi[$, de constante égale à un x placé arbitrairement sur l'axe des ordonnées.

2. Dans l'ensemble, les candidats connaissent bien les expressions des coefficients de Fourier, même si l'on rencontre parfois des erreurs dans les constantes multiplicatives. Les calculs sont souvent bien menés. Parfois, on rencontre des erreurs dans les intégrations par partie. Quelques candidats utilisent une parité/imparité imaginaire de la fonction f pour déduire que certains coefficients de Fourier sont nuls. Dans la question 2(d), le théorème de Dirichlet est bien connu, mais ses hypothèses le sont moins. Beaucoup de candidats prétendent que f est de classe $\mathscr{C}^1$, même parmi ceux qui ont tracé correctement la fonction. La régularisée de f est rarement décrite.
3. Les candidats qui ont trouvé le bon développement de f en série de Fourier ont pu répondre à cette question de manière satisfaisante.
4. Trop de candidats affirment que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

suite à un changement d'indices $n = 2p + 1$.
5. (a) Le théorème de Parseval est dans l'ensemble connu.
   (b) Cette question a été rarement menée à bien. On rencontre trop d'erreurs de calcul, même pour les candidats disposant du bon développement en série de Fourier.

Exercice 3

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. Cette question est en général bien traitée, du moins pour les candidats qui maîtrisent l'usage des fonctions exp et ln. On rencontre malheureusement des erreurs du type $\exp(-\ln x) = x$ ou $\exp(-\ln x) = -x$.
2. Les candidats qui ont attaqué cette question l'ont souvent bien traitée.
3. Idem.

Partie B – Étude d'une fonction

1. (a) Cette question basique a été apparemment extrêmement mal traitée. Non pas qu'elle soit difficile, mais force est de constater que les candidats méconnaissent dans l'ensemble les développement limités. Certaines solutions proposées pour le développement de la fonction $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$ à l'ordre 2 en 0 ne peuvent être qualifiées de DL.
   (b) Quasiment aucun candidat n'a pensé à remarquer que $\arctan(0) = 0$ lors de la primitivation du développement limité.
2. Question plutôt bien traitée par les candidats qui ont trouvé le bon développement limité à la question précédente.
3. Le lien entre dérivée et DL à l'ordre 1 n'est pas maîtrisé. On voit par ailleurs l'erreur

$$f'(0) = \frac{\arctan 0}{0} = 0$$

4. De manière assez suprenante, les tableaux de variation ont posé beaucoup de problèmes aux candidats. Peu sont parvenus au bon résultat.
5. Très peu de candidats ont compris qu'il fallait étudier ce qui se passait au voisinage du point 0.
6. Même commentaire qu'à la question 4.

Partie C – Calcul approché d'une intégrale

1. Cette question a été plutôt bien traitée.
2. La plupart des candidats qui ont abordé cette question a échoué, en tentant de partir de la conclusion, et de remonter jusqu'à l'intégrale.

Les questions 3 à 8 ont été rarement traitées, en moyenne par 5 % des candidats.

Exercice 4

Cet exercice a été dans l'essentiel boudé par les candidats. Souvent, ils ont cherché à grapiller quelques points sur les quatre premières questions. Les arguments géométriques ont été très souvent peu clairs, et les raisonnements manquaient de rigueur.

1. Les coordonnées du point M doivent nécessairement vérifier l'équation. Cela fournit un moyen de se convaincre en partie de la véracité de la solution proposée.
2. Idem.
3. Lors de la résolution du système linéaire, il faut faire attention au fait que certains coefficients peuvent être nuls, selon les valeurs du paramètre θ.
4. En général, le lien avec la question précédente est bien mené.