# Écrit de mathématiques

Comme les années précédentes, le sujet écrit de Mathématiques ATS se divisait en quatre exercices indépendants. L'énoncé volontairement long permettait ainsi aux candidats de faire montre de leurs acquis sur une vaste partie du programme d'ATS (algèbre linéaire, analyse, géométrie, équations différentielles, séries entières, algorithmique et séries de Fourier) en s'attelant à des questions de niveaux variés.

Cette année, le taux d'absentéisme est revenu à un niveau « normal » de 8,3 %, après la session exceptionnelle de 2020, où le taux d'absentéisme s'élevait à 22,7 %. On rappelle que l'absence à une épreuve écrite vaut élimination du concours. La figure 1 présente l'histogramme des notes obtenues par les 954 candidats ayant composé. La moyenne s'établit à 9,9 et l'écart-type à 4,4.

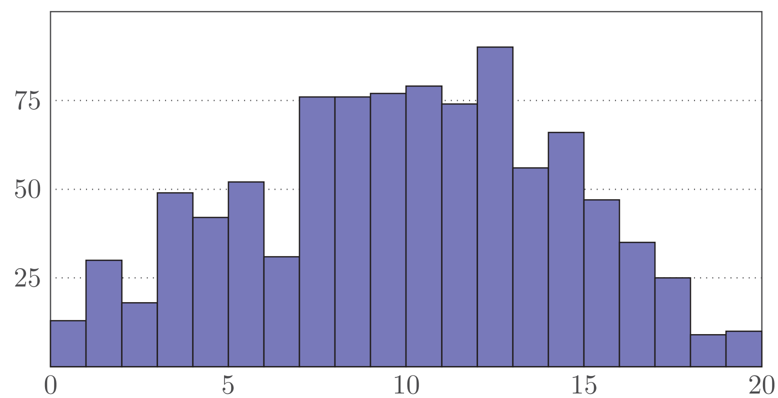


Figure 1 – Histogramme des notes de l'épreuve écrite (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

## Exercice 1

Les résultats du premier exercice sont détaillés à la figure 2. La partie A, dans l'ensemble très bien traitée, reprenait des thèmes d'algèbre linéaire déjà posés lors des précédentes sessions (étude de matrices $3 \times 3$). La partie B, moins classique, a été délaissée par les candidats.

### Partie A – Étude de l'ensemble $F$ et de la matrice $N$

1. Dans l'ensemble la question est bien traitée. Une minorité de candidats n'a pas semblé comprendre ce qui se cache derrière la notation ensembliste $\{P(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et a produit des réponses fantaisistes.
2. De nombreux points devaient être vérifiés dans cette question. La rigueur exigeait de le faire dans un ordre précis : il est par exemple incorrect d'utiliser des arguments portant sur la dimension de $F$ avant d'avoir prouvé qu'il est un (sous-)espace vectoriel. En de nombreuses

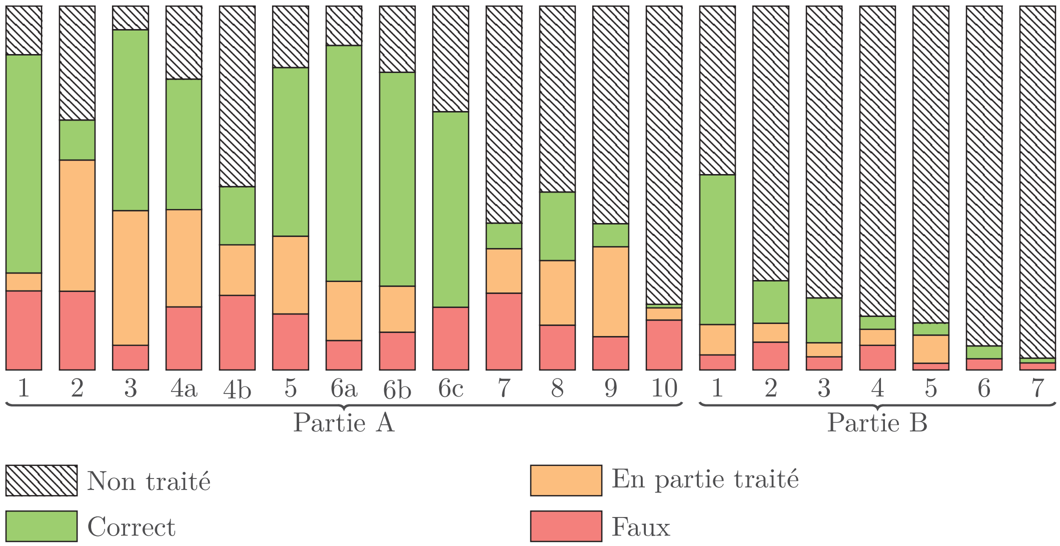


Figure 2 – Résultats de l'exercice 1 de l'épreuve écrite

copies, on retrouve encore de graves confusions entre les notions d'application linéaire et de sous-espace vectoriel.

3. Les calculs étant assez bien menés, l'erreur la plus courante portait sur la notion de coordonnées, qui est mal assimilée par une partie des candidats, qui affirme que les coordonnées de $aI_3 + bN$ dans la base $(I_3, N)$ sont $aI_3$ et $bN$.
4. (a) La plupart des candidats n'a pas exploité l'indication donnée, qui permettait d'éviter des calculs d'inversion fastidieux mais demandait en retour de se rappeler la définition même de l'inverse d'une matrice. Il en résultait une perte de temps dommageable. On rappelle à ce propos que toute réponse correcte à une question est acceptée par les correcteurs, du moment que les méthodes employées restent dans les limites du programme.
   (b) Le lien entre inversibilité d'une matrice et valeur propre nulle est très peu connu.
5. Beaucoup de candidats ont bien vu qu'il fallait appliquer le théorème spectral. En revanche, certains ont invoqué des liens farfelus entre inversibilité et diagonalisabilité d'une matrice.
6. (a) Parfois, le degré du polynôme caractéristique est différent de 3 !
   (b) Dans certaines copies, les valeurs propres proposées ne correspondaient pas aux racines du polynôme caractéristique.
   (c) Bien que l'énoncé ne demandait que d'exhiber la matrice diagonale $D$ , et ce de manière insistante, des candidats ont souhaité déterminer tous les espaces propres et ont perdu de ce fait un temps précieux.
7. Dans le raisonnement par récurrence, seule l'initialisation est bien traitée en général. Assez souvent, la « preuve » de l'hérédité se résumait de manière regrettable à une pétition de principe.
8. Il s'agit ici de la deuxième question de réduction de matrice, après la question 6. Plus compacte, elle a été moins traitée, peut-être en raison de sa place dans l'énoncé.
9. Parmi les copies qui ont abordé cette question, on trouve principalement des erreurs de calcul.
10. Question très peu traitée.

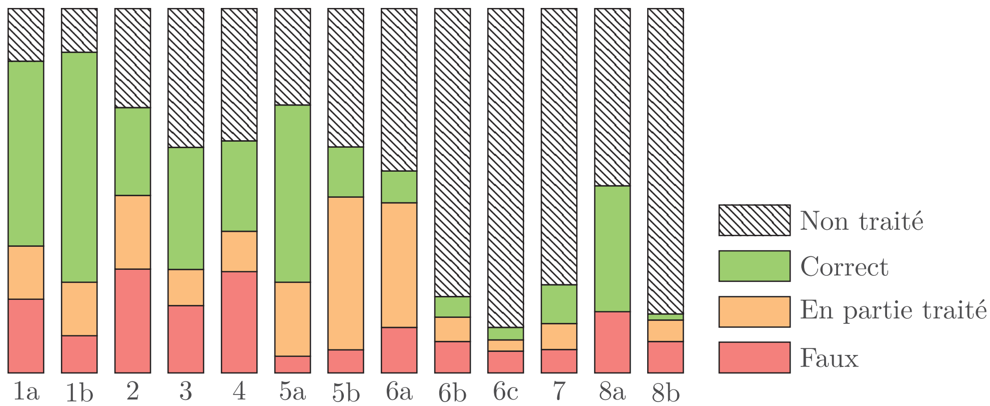


FIGURE 3 – Résultats de l'exercice 2 de l'épreuve écrite

### Partie B – Inversibilité des matrices de $F$

Dans l'ensemble, cette partie a été très peu abordée, hormis la première question, où les candidats ont opté en général pour un calcul direct. Le gros des candidats semble avoir été dérouté par la notion de matrice « inversible dans $F$ ». À partir de la question 2, la rédaction se faisait souvent imprécise et trahissait certainement un manque de structuration logique, la notion de « condition nécessaire et suffisante » n'étant pas bien comprise.

## Exercice 2

Le deuxième exercice, tout aussi classique que le premier, portait sur l'étude d'une fonction périodique et de sa série de Fourier. Les résultats sont affichés à la figure 3.

1. (a) Des candidats se contentent, pour établir la $\pi$-périodicité d'une fonction $f$, de montrer $f(t+\pi) = f(t)$ seulement pour quelques valeurs particulières de $t$.
   (b) En général, les candidats trouvent que la fonction $f$ est paire, mais certains oublient d'en donner une preuve.
2. Bien qu'en théorie, il aurait fallu prouver que $f(x) = \cos x - \sin x$ pour tout $x \in [0\,,\pi/2]$ et $f(x) \neq \cos x - \sin x$ pour tout $x \in \,]\pi/2\,,\pi]$, les correcteurs ont accepté des réponses un peu moins rigoureuses, si elles reposaient sur une idée juste.
3. Pour cette question, il fallait appliquer une formule de trigonométrie. De nombreux candidats ne simplifient pas l'expression $2/\sqrt{2}$.
4. Assez souvent, la représentation graphique de la fonction $f$ ne fait pas apparaître les propriétés de périodicité ou de parité prouvées dans les questions précédentes.
5. (a) La série de Fourier de $f$ prenait une forme particulière en raison de la $\pi$-périodicité de $f$, il fallait être vigilant sur ce point.
   (b) Ici, la majorité des candidats reconnaît le théorème à utiliser (théorème de Dirichlet). Les hypothèses sont invoquées de manière maladroite, ce qui laisse entrevoir des incompréhensions (par exemple, « la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ et elle est continue par morceaux »). S'il est correct d'affirmer que la série de Fourier de $f$ converge vers la régularisée de $f$, encore faut-il remarquer que cette régularisée est $f$, puisque $f$ est continue dans notre cas. Enfin, chez certains, la série de Fourier converge vers une certaine fonction jamais définie mais notée $\tilde{f}$. Les correcteurs ne sont pas dans la tête

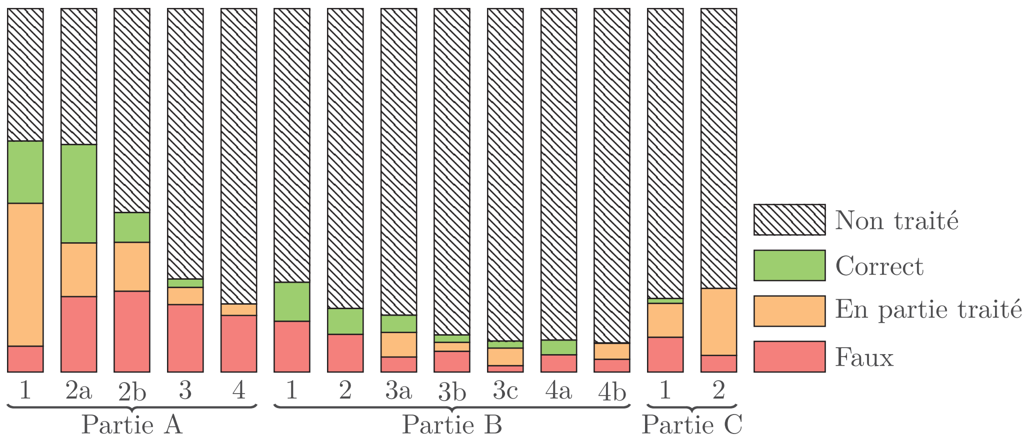


Figure 4 – Résultats de l'exercice 3 de l'épreuve écrite

des candidats et ne sont pas non plus censés deviner des notations si elles n'ont pas été introduites.

6. (a) En général, les candidats ont les bonnes idées de calcul, mais n'obtiennent pas le résultat correct. Cette remarque vaut aussi pour la question 6(c).
   (b) Il fallait faire attention à traiter à part les cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$.
   (c)
7.
8. (a) Le théorème de Parseval est très mal connu. Les correcteurs acceptaient pourtant la réponse même si elle était formulée pour des fonctions $2\pi$-périodiques.
   (b) Les calculs ont rarement été menés à terme.

## Exercice 3

Le troisième exercice se subdivisait en trois parties indépendantes qui abordaient divers aspects de la résolution d'une équation différentielle. Les résultats, apparaissant à la figure 4, sont décevants, notamment en ce qui concerne la première partie. Les candidats tracent des frontières floues entre les différents types d'équations différentielles (linéaires ou non, homogènes ou avec second membre, à coefficients constants ou variables) et appliquent des méthodes de manière aléatoire.

### Partie A – Étude du cas $\omega = 0$

1. Majoritairement, les candidats oublient de préciser que l'intervalle de résolution est $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui permet la division par $x$.
2. (a) Les résultats à cette question sont plus que moyens. Parmi les candidats qui connaissent à peu près la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients variables, beaucoup se trompent de signe lors de la primitivation de $x \mapsto 1/x$. Enfin, la manipulation des fonctions usuelles exp et ln reste fragile.
   (b) Dans une confusion avec la résolution des équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants, beaucoup introduisent l'équation caractéristique $xr^2 + r = 0$, ou bien des variantes encore moins sensées. D'autres encore cherchent une solution

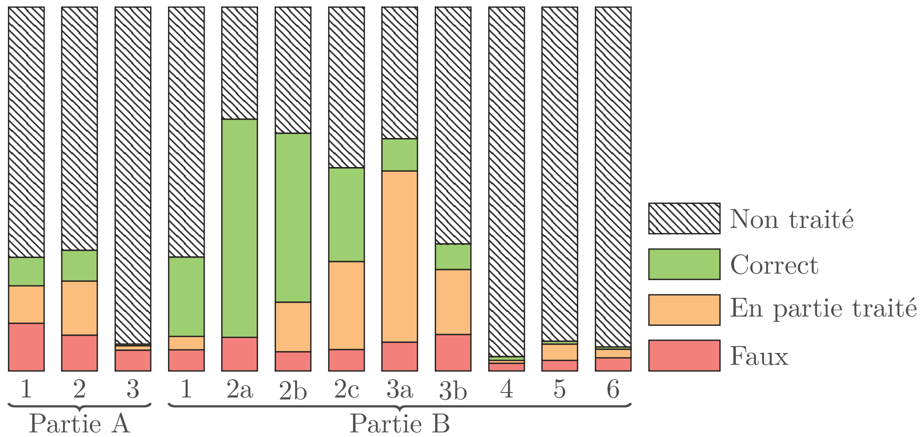


Figure 5 – Résultats de l'exercice 4 de l'épreuve écrite

particulière à cette équation homogène en appliquant la méthode de variation de la constante.

3. Bien des candidats ne connaissent pas de primitive à la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.
4. Les candidats n'ont pas saisi le problème du raccordement des solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

### Partie B – Étude du cas $\omega > 0$

Cette partie qui portait sur la recherche de séries entières solutions de l'équation différentielle est très peu traitée, y compris les premières questions qui étaient immédiates. Les calculs, pourtant simples, n'ont souvent pas abouti.

### Partie C – Calcul approché

1. Pour la minorité de candidats l'ayant traitée, cette question est moyennement réussie. Parmi les différentes hypothèses du critère spécial des séries alternées, la vérification de la décroissance était en général le point faible.
2. Les correcteurs ont apprécié que plus de candidats tentent cette question d'algorithmique, même si dans l'ensemble ils restent une minorité à s'y attaquer. Les variables ont en général été correctement initialisées, mais la condition d'arrêt de la boucle `while`, qui nécessitait une compréhension fine du fonctionnement l'algorithme et des mathématiques sous-jacentes, n'a été trouvée que dans une seule copie.

## Exercice 4

Les résultats de l'exercice 4 se trouvent à la figure 5. L'exercice se divisait en deux parties indépendantes, l'une de caractère plus géométrique et l'autre plus analytique.

### Partie A – Construction géométrique

1. Des confusions fréquentes entre vecteurs, affixes, normes. À ce propos, un quadrilatère dont deux côtés opposés ont même longueur n'est pas forcément un parallélogramme. Les candidats vont parfois chercher des milieux de diagonale pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

2. Les résultats à cette question simple sont décevants, beaucoup de candidats n'ayant pas pu trouver de relation entre les arguments des nombres complexes $z$ et $z^2$.
3. Question très peu traitée.

### Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée

1. En général, la question est plutôt réussie dans les copies qui l'ont traitée. Il suffisait de savoir séparer $e^{it}$ en parties réelle et imaginaire.
2. (a) Cette question est également réussie. Les candidats qui ont échoué ne connaissaient pas la définition de fonction périodique (voir exercice 2, question 1(a)).

   (b) En général, le calcul de $x(-t)$ et $y(-t)$ est bien mené, mais il arrive que les candidats se trompent quant à la symétrie qui permet de passer de $N(-t)$ à $N(t)$.

   (c) Les correcteurs attendaient ici une justification en deux temps, même rapide (réduction de l'intervalle d'étude d'abord par périodicité, puis par la symétrie de la question précédente).
3. La première partie de la question était plutôt calculatoire et nécessitait d'appliquer les formules de trigonométrie rappelées dans l'énoncé. On rencontre beaucoup d'erreurs de calcul sur les valeurs particulières de sin et de cos. Les justifications sur le signe sont parfois absentes. Les candidats ne pensent pas à vérifier les points particuliers même quand ils obtiennent une figure étrange.

Les questions 4, 5 et 6 ont été très peu traitées. En ce qui concerne la question 5, les correcteurs ont été indulgents sur le tracé de la courbe paramétrée au voisinage du point de rebroussement.