Écrit de mathématiques

Comme lors des précédentes sessions, le sujet écrit de Mathématiques se composait de quatre exercices indépendants, qui évaluaient les candidats sur une vaste partie du programme d'ATS : algèbre linéaire, nombres complexes, géométrie, équations différentielles, séries entières, algorithmique et séries de Fourier. Si certaines parties classiques permettent d'assurer un minimum de points, les bonnes copies se sont distinguées par une maîtrise plus uniforme du programme. En particulier, nous regrettons que la majorité des candidats fasse l'impasse sur les questions d'algorithmique, qui sont pourtant valorisées.

En cette année particulière marquée par la crise sanitaire, un grand nombre de candidats ne s'est pas présenté à l'épreuve de Mathématiques ; le taux d'absentéisme, de 22,7 %, est sensiblement supérieur à celui de l'année précédente. On rappelle qu'en cas d'absence à une épreuve écrite, un candidat est éliminé du concours. La figure 1 présente l'histogramme des notes obtenues par les 821 candidats ayant participé à l'épreuve de Mathématiques. La moyenne s'établit à 9,8 et l'écart-type à 4,5.

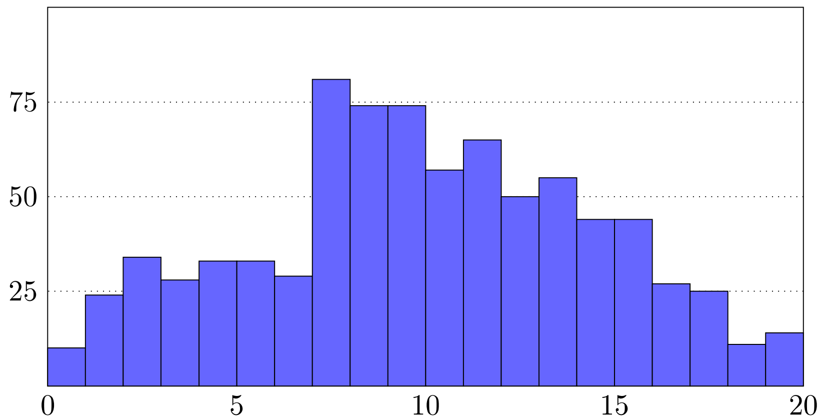

FIGURE 1 – Histogramme des notes de l'épreuve écrite (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

Exercice 1

Les résultats du premier exercice sont détaillés à la figure 2. Comme d'habitude, cette partie consacrée à l'algèbre linéaire est la mieux traitée.

1. Des candidats affirment que la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonale. D'autres font remarquer qu'elle présente une sorte de « symétrie centrale » par rapport au coefficient du milieu, ce qui ne correspond à aucune notion pertinente en

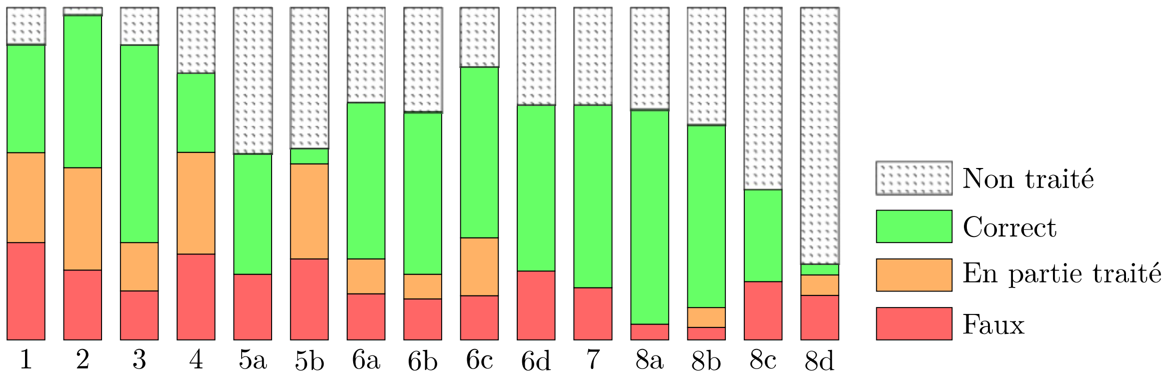

FIGURE 2 – Résultats de l'exercice 1 de l'épreuve écrite

algèbre. Le théorème spectral est peu invoqué, et l'hypothèse que les coefficients sont réels est encore trop souvent oubliée. De manière plus problématique, certaines copies affirment que les matrices symétriques à coefficients réels seraient diagonalisables « par définition ».

2. Dans les copies faibles, le calcul du produit matriciel pose problème, par exemple certains aboutissent à une matrice $A_a U_1$ carrée. De manière quasi systématique, la non-nullité du vecteur propre U_1 est passée sous silence.
3. On ne peut scinder le polynôme $\lambda^2 - a$ en $(\lambda - \sqrt{a})(\lambda + \sqrt{a})$ que lorsque $a \geqslant 0$. Par ailleurs, le degré du polynôme caractéristique d'une matrice de taille 3×3 doit être égal à 3.
4. Bien que l'énoncé demandait des valeurs propres réelles, des candidats ont souhaité exhiber toutes les valeurs propres complexes. À noter aussi beaucoup d'erreurs sur les multiplicités.
5. (a) Le calcul des espaces propres n'est pas nécessaire.
   (b) Dans cette question, la notion de matrice trigonalisable a posé problème. Ici, il fallait remarquer que A_0 est une matrice triangulaire inférieure, par conséquent trivialement trigonalisable. Bien entendu, tout autre raisonnement correct était accepté.
6. (a) Lors de la résolution du système, beaucoup déduisent de l'équation $y = y$ que $y = 0$ ou bien $y = 1$.
   (b)
   (c) Question dans l'ensemble bien traitée. Parfois, on recontre une matrice P^{-1} visiblement non inversible, par exemple qui contient une ligne ou une colonne nulle.
   (d) Des candidats calculent explicitement la matrice $P^{-1}A_4P$, ce qui n'est pas nécessaire et se termine le plus souvent par des fautes de calcul.
7.
8. (a)
   (b)
   (c) Beaucoup de candidats calculent explicitement le produit BX_0, sans utiliser le fait que $B = A_4 + 2I_3$. Cette réponse est bien entendu acceptée.
   (d) Cette question a été globalement très peu traitée.

Exercice 2

Le deuxième exercice portait sur la géométrie dans le plan complexe. Les résultats sont présentés à la figure 3.

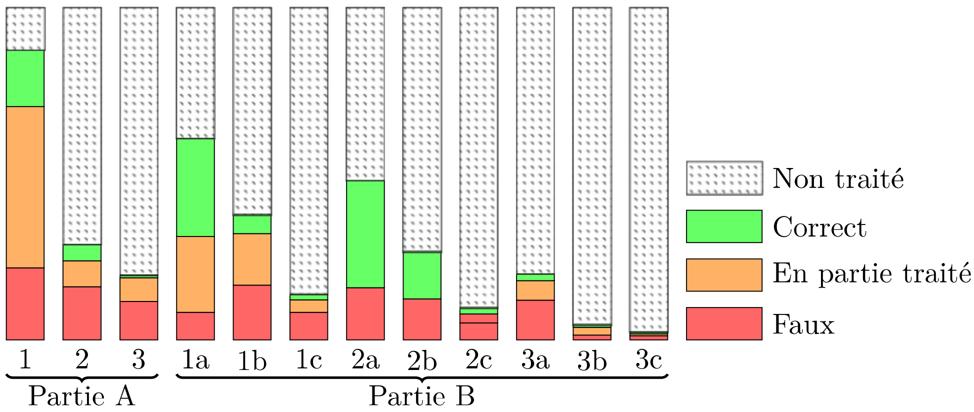

FIGURE 3 – Résultats de l'exercice 2 de l'épreuve écrite

Partie B – Étude d'une suite récurrente

1. (a) Cette question est bien traitée en général, mis à part quelques maladresses dans la rédaction, par exemple de dire qu'une « équation est impossible » pour signifier qu'elle n'admet pas de solution.

   (b) Les notions d'injectivité et de surjectivité sont insuffisamment maîtrisées (« la fonction est surjective car chaque image admet un antécédent »). Plus rare, certains calculent le « noyau » de f pour étudier l'injectivité.

   (c) Dans cette question, c'est véritablement la structure logique du raisonnement qui est évaluée.

2. (a) La résolution de l'équation $z^2+1=0$ laisse à désirer. À ce stage de l'épreuve, nombreux sont ceux qui calculent le discriminant.

   (b)

   (c) Même remarque qu'en 1(c).

Exercice 3

Le troisième exercice se proposait d'étudier une équation différentielle avec paramètre réel. La deuxième partie en cherchait des solutions sous forme de série entière, et la troisième partie était consacrée à la recherche de solutions numériques. Enfin, une dernière partie, plus exigeante, établissait une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions polynomiales, en s'appuyant sur le cours d'algèbre linéaire. Les résultats sont présentés en figure 5.

Partie A – Étude du cas $m = 0$

1. Comme on cherche les solutions réelles, il est préférable d'introduire les fonctions trigonométriques cos et sin comme base de l'espace des solutions. On rencontre parfois des solutions de la forme $x \mapsto A\cos \mathrm{i}x + B\sin \mathrm{i}x$.

Exercice 4

1. (a) Beaucoup de réponses sont aberrantes, il suffit pourtant de vérifier le résultat en des valeurs particulières de x pour se convaincre de son exactitude.

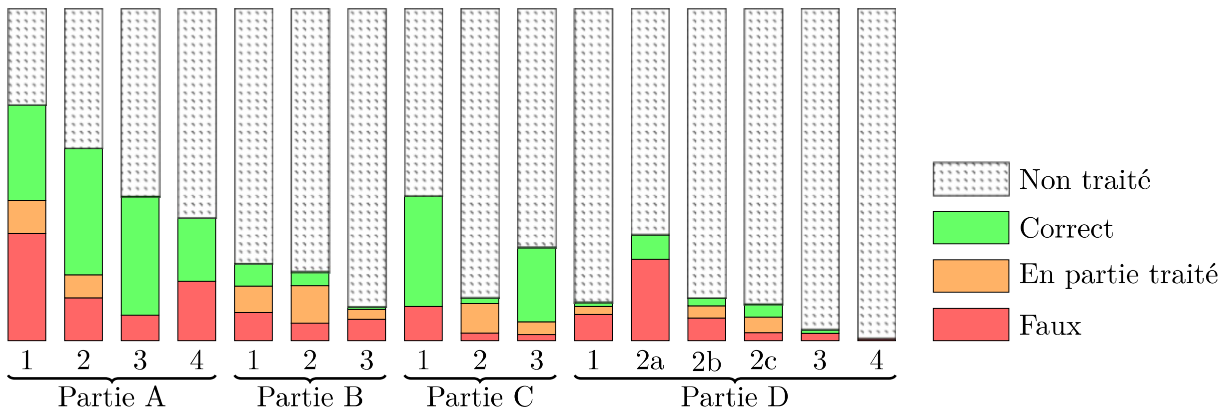

FIGURE 4 – Résultats de l'exercice 3 de l'épreuve écrite

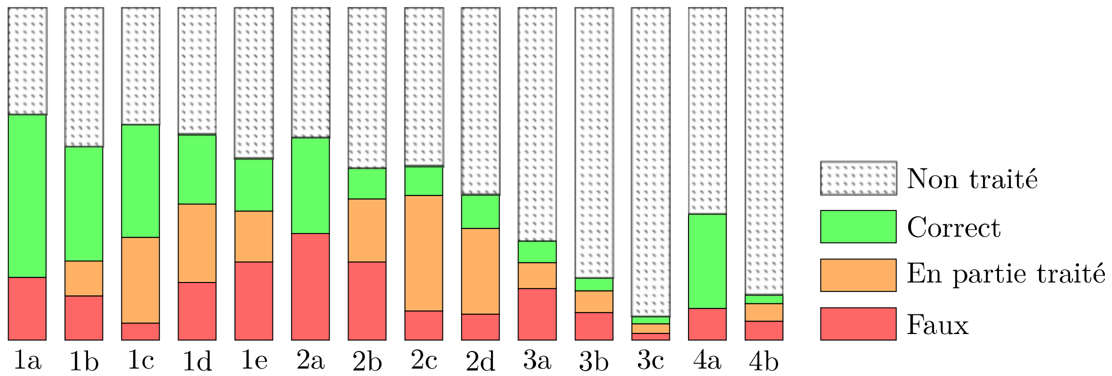

FIGURE 5 – Résultats de l'exercice 4 de l'épreuve écrite

(b) Pour nombre de candidats, la définition de périodicité est à revoir : soit ils affirment que $f(x) = f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou bien ils résument la 1-périodicité à $f(0) = f(1)$.

(c)

(d) Très souvent, les graphes tracés correspondent à des fonctions non périodiques. Des candidats forcent une parité de la fonction. Il faut par ailleurs faire apparaître la valeur de la fonction f aux points de discontinuité.

(e) Maladroitement, un certain nombre de candidats soutient que « la fonction n'est pas continue parce qu'elle est continue par morceaux » en voulant évoquer la présence de discontinuités.

2. (a) Le coefficient a_0 correspondant à la valeur moyenne de f sur une période, on doit trouver un résultat cohérent avec le graphe de la question 1(e).

   (b) Trop fréquemment, des règles d'intégration du type

$$\int_a^b \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x = \left\lfloor \frac{b^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor$$

   sont inventées. Par ailleurs, la fonction f ne présente aucune parité permettant de trivialiser la question. Quelques candidats ont remarqué cependant que $f - a_0$ est impaire et se sont épargné des calculs fastidieux.

   (c) Là encore, beaucoup d'erreurs dans les calculs dues à la présence de la partie entière, qui a fortement perturbé les candidats. À la suite de cette question, tous les coefficients de Fourier sont nuls pour une proportion non négligeable de copies, ce qui devrait interpeller.

   (d) On peut regretter que les candidats ne précise pas quelle est la fonction régularisée de f, en donnant ses valeurs en chaque point.

3. (a) Fréquemment, on rencontre des candidats qui utilisent la règle de d'Alembert à cette question. Comme la série ne converge pas absolument, cette approche est vouée à l'échec.

4. (a) La formule de Parseval exprimée pour une période $T > 0$ quelconque, ou $T = 2\pi$ était acceptée. Rappelons que cette formule consiste en une égalité, il ne suffit pas de donner l'un des deux membres de l'égalité...