Épreuves de mathématiques

1 Épreuve écrite

Le sujet de mathématiques de cette année se composait de quatre exercices indépendants, de tailles sensiblement égales, et qui portaient sur diverses parties du programme d'ATS : algèbre linéaire, analyse générale, fonctions de plusieurs variables et géométrie dans le plan. Il s'est révélé très classant, comme le montre la figure 1. La moyenne s'établit à 10,1 et l'écart-type à 4,3. La qualité des copies, très disparate, varie de la copie vide à la copie traitant la quasi-intégralité du sujet. En moyenne, elles ont été plus fournies que lors des années précédentes. L'effort de présentation est notable (numérotation des questions, résultats bien lisibles et visibles). Tout cela confirme que les candidats sont de mieux en mieux préparés à cette épreuve.

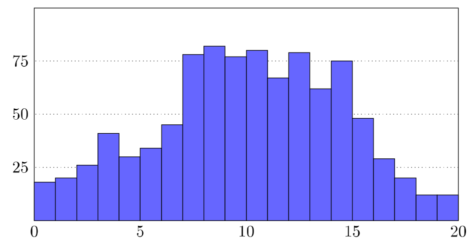

Figure 1 – Histogramme des notes de l'épreuve écrite (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

Cependant, on observe une utilisation du langage mathématique souvent approximative, trahissant un manque de rigueur et de recul sur les objets manipulés. C'est parfois la structure logique des raisonnements qui pose problème. Beaucoup de questions sont traitées de manière assez « mécanique », les candidats cherchant à tout prix à placer des recettes familières (pour citer un exemple frappant de ce phénomène, une question, qui faisait mention d'un trinôme du second degré, a conduit un grand nombre de candidats à en chercher les racines, ce qui n'était nullement demandé).

Enfin, nous regrettons que la majorité des candidats ait fait l'impasse sur deux parties pourtant classiques, à savoir l'algorithmique et la géométrie. À l'inverse, ceux ayant fait le choix d'y consacrer du temps sont généralement ceux qui sont sortis du lot.

Exercice 1

Les résultats du premier exercice, question par question, sont détaillés à la figure 2. C'est l'exercice le mieux traité, en tout cas le plus traité. Les calculs de réduction sont faits de manière automatique et ne sont souvent que trop peu rédigés.

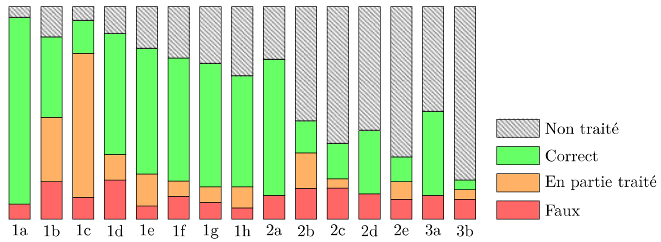

Figure 2 – Résultats de l'exercice 1 de l'épreuve écrite

1. (a) Cette question a été bien traitée par une très grande majorité de candidats. Ceux qui l'ont ratée ont commis en général des erreurs conceptuelles graves (par exemple, en faisant apparaître les vecteurs e_i parmi les coefficients de la matrice S).
   (b) Le théorème spectral est rarement invoqué, et la condition « matrice à coefficients réels » également oubliée. Là encore, le vocabulaire n'est pas maîtrisé. Si certaines erreurs peuvent faire sourire (« matrice identitaire », « théorème du spectre »), d'autres, comme la confusion entre matrice symétrique et symétrie, cachent de réelles incompréhensions.
   (c) Très souvent, les candidats concluent que « la matrice S est inversible », alors que l'énoncé attendait une propriété sur l'endomorphisme s.
   (d) Les candidats sont invités à vérifier la cohérence de leurs résultats (degré du polynôme caractéristique, coefficient dominant).
   (e) Lorsque le polynôme caractéristique n'est pas donné sous forme factorisée dans la question précédente, la recherche des racines et de leurs multiplicités n'est pas évidente. Beaucoup de candidats « devinent » la réponse (peut-être en lisant les questions suivantes) et la proposent sans cohérence avec le polynôme obtenu.
   (f) Question plutôt bien traitée, mais la rédaction laisse souvent à désirer. Les candidats ayant trouvé une valeur propre erronée ont souvent cherché à placer le vecteur nul parmi la base demandée.
   (h) Certains étudiants calculent par réflexe l'inverse de Q_1, quand bien même l'énoncé ne le demandait pas. Notons aussi que dans certains cas, il est facile de voir, en un coup d'œil, qu'une matrice n'est pas inversible (présence d'une ligne ou d'une colonne nulle, de lignes ou de colonnes identiques, etc.), ce qui devrait alerter le candidat sur la pertinence de son résultat.
2. (b) Même remarque que pour la question 1(c).
   (c) Une grande confusion règne quant à la nature même des objets manipulés, on observe en effet des non-sens tels que $p \circ p = p(p)$, ou bien $p = 1$, qui se déduit de $p^2 = p$.
   (d) La remarque précédente s'applique. Cette fois, $p(u_i)$ est tantôt égal à un endomorphisme, tantôt égal à une matrice carrée.
   (e) Peu de candidats font le lien entre l'existence d'une base de vecteurs propres et la diagonalisabilité de p. Ceux ayant fait le choix d'appliquer le théorème spectral reproduisent souvent les erreurs de la question 1(b).

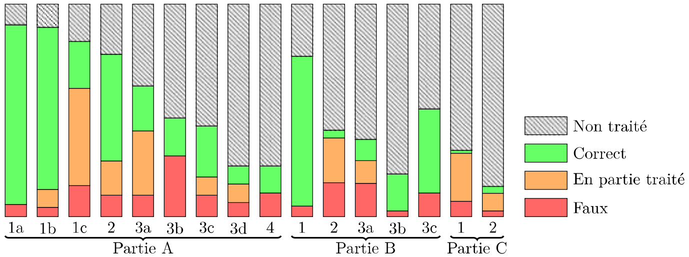

FIGURE 3 – Résultats de l'exercice 2 de l'épreuve écrite

3. (b) Question très peu traitée. Le cas échéant, si D_3 est correcte, la matrice choisie pour Q_3 est $3Q_1 + 4Q_2$.

Exercice 2

Le deuxième exercice portait sur l'étude asymptotique d'une suite d'intégrales. La première partie démarrait avec des questions de cours sur les fonctions trigonométriques hyperboliques, qui étaient en général assez bien menées (voir la figure 3).

Partie A

1. (c) La dérivée d'une fonction composée pose encore problème. Trop souvent $f' = 0$ implique l'égalité $f = 0$ (ou bien $f = 1$ sans la moindre justification).
3. (a) Il manque toujours une ou plusieurs hypothèses dans l'application du théorème des valeurs intermédiaires ou du théorème de la bijection. Parfois, on trouve comme réponse « voir tableau de variations. »
   (b) De manière pavlovienne, une majorité des candidats essaie de résoudre l'équation du second degré $z^2 - 2z - 1 = 0$, à sa seule mention, ce qui n'est demandé qu'à la question suivante.
   (c) Cette question donne lieu à des erreurs inacceptables de manipulation de la fonction ln, comme « $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$. »
4. Peu de candidats utilisent la relation $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$. Ils trouvent alors la valeur de $\mathrm{ch}\,\alpha$ par un calcul laborieux (parfois même alors que la valeur trouvée pour α est fausse !).

Partie B

2. La décroissance et la positivité de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont établies de manière fort peu rigoureuses, citons quelques arguments farfelus :

$$\int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n+2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \mathrm{sh}^{2n} t \,\mathrm{d}t - \int_0^\alpha \mathrm{sh}^2 t \,\mathrm{d}t, \qquad \frac{I_{n+1}}{I_n} = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{sh}^{2n+2} t}{\mathrm{sh}^{2n} t} \,\mathrm{d}t.$$

On retrouve fréquemment l'affirmation selon laquelle la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

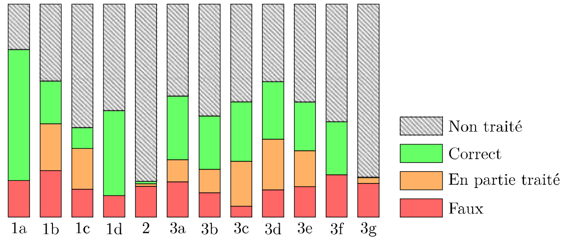

FIGURE 4 – Résultats de l'exercice 3 de l'épreuve écrite

3. (a) Les erreurs de primitivation ou de dérivation sont nombreuses. On trouve pêle-mêle

$$\int \mathrm{sh}^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{sh}^{2n+1} t}{2n+1}, \qquad (\mathrm{sh}^{2n+1})' = \mathrm{ch}^{2n+1}, \qquad (\mathrm{sh}^{2n+1})' = (2n+1)\,\mathrm{sh}^{2n}.$$

Dans l'ensemble, l'intégration par partie est trop rarement menée à bien.

   (c) Le langage employé est souvent maladroit (« la limite tend vers 0 »), et les non-sens sur la notion de limite sont extrêmement courants (limite d'une suite qui reste une suite, par exemple dans « $\lim I_n = -I_{n+1}$ »).

Partie C

Cette partie a été dans l'ensemble négligée, malgré son importance. C'est d'autant plus incompréhensible que les sujets de mathématiques ATS demandent de manière quasi-systématique d'écrire un algorithme itératif simple (semblable à celui de la question 2) depuis quelques années. Rappelons que les correcteurs ne s'attachent absolument pas au respect de la syntaxe du langage *Scilab*, les candidats peuvent même présenter leur algorithme en pseudo-code.

1. Il est bien évident que l'algorithme de dichotomie ne peut utiliser de variable α, puisqu'il a précisément pour but d'en trouver une approximation numérique ! La condition sur la boucle `while` n'est quasiment jamais correcte.
2. Paradoxalement, cette deuxième question a été moins bien exécutée, alors qu'elle était plus facile. Il est dommage que la boucle commence souvent au rang 1 sans que la formule ne soit adaptée.
   Outre le compteur de boucle, seule une variable est nécessaire. La solution consistant à remplir progressivement un tableau et renvoyer sa dernière entrée est moins performante du point de vue mémoire (mais elle était acceptée sans pénalité). Parfois, on voit des variables « indexées » I_n ou I_k, sans que le code proposé fasse clairement apparaître qu'il s'agit des différentes entrées d'un tableau I. Dans ce cas, les correcteurs ont sanctionné ce qu'ils considéraient être l'incursion illégitime d'un objet mathématique (suite infinie) dans un programme informatique.

Exercice 3

Les résultats obtenus à cet exercice sont présentés à la figure 4.

1. (a) Les droites sont souvent tracées mais le domaine $\mathscr{D}$ n'est pas forcément indiqué.

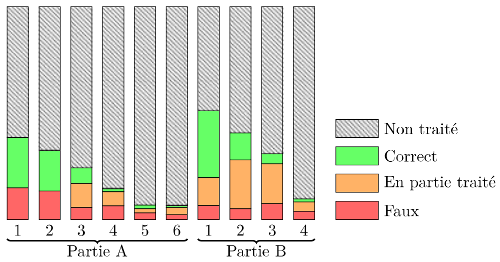

FIGURE 5 – Résultats de l'exercice 4 de l'épreuve écrite

(b) Très souvent, les propriétés de symétrie du domaine $\mathscr{D}$ sont confondues avec celles de la fonction f, nombreux étant ceux qui montrent que $f(x,-y) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$.

2. Question quasiment jamais traitée.

3. (a) Trop souvent, le gradient de f en (x,y) est un scalaire. On trouve même fréquemment la formule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, qui semble résulter d'un mélange malheureux entre les notions de gradient et de divergence.

(c) Les candidats ont fait preuve d'une grande imagination quant à l'orthographe du mathématicien allemand Hermann SCHWARZ, souvent orthographié SCHWARTZ, parfois SHARF ou SHARTZ, quand ils n'avaient pas confondu son théorème avec celui d'OSTROGRADSKI ou de DIRICHLET. Justement, les hypothèses du théorème de SCHWARZ semblent parfois avoir fusionné avec celles du théorème de DIRICHLET, engendrant la condition bâtarde « f est de classe $\mathscr{C}^2$ et est $\mathscr{C}^1$ par morceaux » ; la classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux étant une notion qui reste à définir pour les fonctions de plusieurs variables...

Enfin, permettons-nous une remarque de pure forme. Les réponses mettent souvent en œuvre une formulation du type « *Le théorème X dit que si A, alors B. Or on a A, donc d'après le théorème X, on a B* », qui, tout en étant irréprochable du point de vue logique, n'en reste pas moins lourde.

(f) Souvent, on donne le développement limité de $\ln(1-u)$ à la place, ou bien le développement limité en une autre variable que u (les candidats doivent s'adapter aux notations de l'énoncé, même pour les questions de cours).

(g) Seul un candidat a résolu cette question. L'erreur classique consiste à développer l'expression $\ln(1+(1+t)^2)$ au point $t=0$ en traitant la quantité $1+t$ comme infinitésimale.

Exercice 4

Comme le montre la figure 5, cet exercice de géométrie analytique a été globalement peu abordé par les candidats. La longueur du sujet ne saurait expliquer à elle seule ce désamour. Le blocage semble plus « culturel » que lié à une quelconque difficulté de l'exercice. Le candidat motivé pourra s'entraîner à ce genre de problèmes en travaillant sur les exercices de géométrie donnés au concours ces dernières années.

Partie A

1. La justification est souvent floue et ne s'appuie pas sur l'indication donnée dans l'énoncé (égalité de longueurs d'arcs).
3. Les candidats se contentent souvent de montrer le caractère orthogonal de la base.
4. Les candidats font rarement appel à la relation de CHASLES.
6. Les formules de trigonométrie sont mal connues.

Partie B

2. Les candidats ne semblent pas tous comprendre les mécanismes de réduction de l'intervalle d'étude, le divisant systématiquement par 2 (par exemple en se ramenant à $[0\,,\pi]$ grâce à $\mathrm{P}(-t)$, puis à $[0\,,\pi/2]$ grâce à $\mathrm{P}(t+\pi)$).
3. Le calcul des dérivées de x et y est souvent faux, et lorsqu'il est bon, l'étude de leur signe pose problème. Cette question, pourtant simple, a été rarement traitée intégralement.

2 Épreuve orale

2.1 Remarques générales

Le but de l'épreuve orale est de contrôler l'assimilation des connaissances du programme de mathématiques de la filière ATS. Cette épreuve est également l'occasion d'examiner la capacité d'initiative des candidats, leur réactivité face à l'interrogateur ainsi que leur aisance à exposer des idées et s'exprimer dans un langage précis.

Lors de cette session, 500 candidats se sont répartis entre 10 jurys, pendant quatre jours d'interrogation. La moyenne s'établit à 11,5 et l'écart-type à 4,4. La distribution des notes obtenues est donnée à la figure 6.

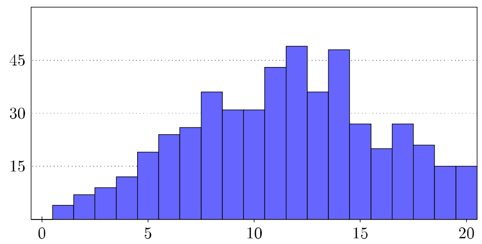

FIGURE 6 – Histogramme des notes de l'épreuve orale (abscisses : notes, ordonnées : effectifs)

2.2 Modalités

À son arrivée dans la salle d'examen, un candidat reçoit une planche contenant deux exercices de mathématiques : très souvent un d'algèbre et un autre d'analyse, mais ce n'est pas systématique. Les jurys s'efforcent de poser des exercices balayant l'ensemble du programme de mathématiques. Le candidat peut demander, à tout moment de la préparation, que l'un des deux exercices soit