2.2 Quelques éléments de correction

Les éléments de correction donnent les grandes lignes de résolution des questions ; ils ne correspondent pas à la rédaction attendue par le jury.

Ceux de la première épreuve écrite sont téléchargeables à l'adresse

`https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/corrige_ep1_2025.pdf`.

2.3 Commentaires par questions

Exercice préliminaire : la loi sur $K[u]$ n'est pas claire pour un bon nombre de candidats qui écrivent x au lieu de u (ce problème avait déjà été constaté l'an dernier dans la première épreuve). Il convient de ne pas noter P et P' deux polynômes quelconques, la notation P' est réservée à la dérivation dans ce contexte. De même, écrire pour tout X dans $K[X]$ est pour le moins maladroit et noter X et X' dans $K[X]$ l'est plus encore.

Q1 : Pour démontrer l'unicité, il convient de partir de $\theta_{u(X)} = u$, et non de $\theta_{u(P)} = P(u)$. Plusieurs candidats prennent u et v deux endomorphismes et tentent alors de montrer que $\theta_u = \theta_v$ pour montrer qu'il y a unicité du morphisme θ_u. De plus, la linéarité est rarement démontrée et trop de composées d'endomorphismes sont confondues avec des produits.
Q2 : Dans les erreurs les plus fréquentes, un certain nombre de candidats se contentent de considérérer seulement des endomorphismes particuliers (u nilpotent, $u = \mathrm{Id}$ etc.), d'autres écrivent $P(u) = 0$ donc u est une racine de P. Cette question peut se traiter élémentairement en considérant la famille de cardinal n^2+1 $(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u^{n^2})$ de $L(E)$, qui est de dimension n^2. Cependant, il faut veiller à la précision du vocabulaire et ne pas parler de la dimension d'une famille.
Q3 : Certains candidats, trop précautionneux, ont perdu du temps à redémontrer que les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; beaucoup ont oublié de préciser que l'idéal n'est pas réduit au polynôme nul pour justifier l'existence d'un générateur unitaire. Il est regrettable que certains candidats confondent $\varnothing$ et 0.
Q4 : Cette question a mis en valeur certains candidats ; par exemple, ceux qui ont pensé à invoquer l'isomorphisme entre $K[X]/\mu_u$ et $K[u]$. Cependant, les manques de précision du vocabulaire et des notations ont été nombreux ; certains candidats évoquent des familles échelonnées de polynômes.
Q5 : Dans les copies, on constate trop de confusions entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ menant à des raisonnements faux. La rigueur fait souvent défaut, certains candidats se contentent de raisonner par implication sans se préoccuper de la réciproque. Certaines étapes de calcul ne sont pas justifiées et de nombreux candidats ne précisent pas qu'ils calculent avec des entiers compris entre 1 et n.
Q6 : Des candidats tentent de démontrer la propriété par récurrence sur α ce qui est une mauvaise idée. Ensuite, certains candidats peinent à identifier les entiers qui ne sont pas premier avec p^α.
Q7 : Cette question a été souvent traitée, mais a été peu réussie.
Q8 : Dans certaines copies, les candidats confondent l'indéterminée X avec une variable. Tous les candidats ne pensent pas à montrer que les racines sont deux à deux distinctes. De plus, alors que ω_n est défini par l'énoncé, il ne faut pas s'approprier cette notation pour définir un autre objet. Enfin, de nombreux candidats confondent ω_k et ω_n^k.
Q9(a) : Un argument géométrique peut suffire pour répondre à la question. On a constaté des maladresses dans la manipulation des arguments avec les nombres complexes ; par exemple, certains candidats écrivent que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ implique $\theta = \theta'$ en toute généralité.
Q9(b) : Il ne suffit pas de montrer qu'un polynôme P n'a pas de racines réelles pour conclure à son irréductibilité ; un argument supplémentaire portant sur le degré est indispensable. On rappelle aux candidats que "complexe" ne signifie pas "non réel".
Q9(C) : L'écriture en facteurs irréductibles n'est pas toujours correcte, de trop nombreux candidats mettent seulement $X - 1$ en facteur de $X^{n-1} + X^{n-2} + ...$
Q10(a) : Certaines copies ont du mal à distinguer l'affirmation "m et n sont premiers entre eux" de l'affirmation "m divise n ou n divise m" ; par exemple, 6 et 9 ne sont pas premiers entre eux

et pourtant 6 ne divise pas 9 et 9 ne divise pas 6.
Q11(a) : Le théorème de Lagrange est méconnu et, lorsqu'il est utilisé, il est rarement cité. Encore une fois, ne pas être premier avec n, même pour $m < n$, ne signifie pas diviser n.
Q11(c) : Cette question a mis en valeur les très bons candidats. Le début d'un raisonnement par récurrence doit commencer par l'annonce du résultat qui va être démontré et doit être quantifié correctement. Cela permet non seulement au lecteur de mieux suivre ce qui va être fait mais cela permet surtout au candidat de savoir ce qu'il veut faire. La mise en place d'une récurrence forte était primordiale, car rien ne permet de dire que $A - a_n X^{n-m} B$ est de degré exactement n.
Q12 : Trop de candidats ignorent le théorème "A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples de A" et affirment que $X^r - 1$ est, ou bien le polynôme caractéristique de A (ce qui est sans espoir si $k \neq r$), ou bien son polynôme minimal, ce qui n'est pas vrai en général. Plus généralement, beaucoup de candidats confondent polynôme annulateur, minimal et caractéristique. De plus, si l'on connait un polynôme annulateur, celui-ci n'est pas forcément le polynôme minimal ou encore le polynôme caractéristique.
Il convient de faire la différence entre l'affirmation "les valeurs propres sont des racines n-ième de l'unité" et "les valeurs propres sont les racines n-ième de l'unité". De plus, le théorème de d'Alembert-Gauss est mal connu et est transformé ; tout polynôme à coefficients constants est certes scindé dans $\mathbb{C}$, mais pas forcément à racines simples.
Enfin, trop de candidats confondent "diagonalisable" et "inversible".
Q14 : Dans cette question, qui a mis en valeur les candidats solides, il faut veiller à utiliser correctement les quantificateurs. Trop de candidats ne savent pas écrire la propriété à montrer au rang $n = 1$. De plus, la gestion des signes est trop souvent problématique ; il est à noter qu'il n'est pas apprécié de faire apparaître le résultat après plusieurs lignes de calculs erronés.
Q15(a) : Attention à la rigueur dans les notations, l'écriture $P(u(x))$ n'a pas de sens.
Q15(b) : Le lemme des noyaux ne s'applique qu'après avoir cité ses hypothèses ; en particulier, les polynômes doivent être premiers entre eux. La stabilité des noyaux doit se traiter rapidement.
Q15(c) : Question traitée par les excellentes copies qui montrent un certain recul en algèbre linéaire.
Q18(a) : Attention à ne pas confondre différentes écritures ; par exemple, $P(u)ou = uoP(u) = (XP)(u)$ et $P(u^2)$.
Q20(a) : Les candidats doivent éviter l'implication fausse "A inversible donc A diagonalisable".
Q21 : Attention aux affirmations hâtives ; par exemple, deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas forcément semblables, c'est la réciproque qui est vraie. De même, deux matrices ayant le même polynôme minimal ne sont pas forcément semblables. Il s'agit d'une erreur qu'il convient d'éviter.
Q29 : Inverser une matrice de rotation ne doit pas demander pas de longs calculs.
Q42(a) : Alors que la factorisation est souvent bien démontrée dans les copies qui arrivent à cette question, le caractère irréductible est, en revanche, souvent oublié. Énumérer les trois éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ permet de vérifier s'ils sont ou non racines.

2.4 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable sur le site du jury, à l'adresse
`https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep2/25-ep2.pdf`.

2.5 Quelques éléments de correction

Les éléments de correction de la seconde épreuve écrite sont également téléchargeables sur ce site, à l'adresse
`https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/corrige_ep2_2025.pdf`. Ces éléments de correction ne prétendent aucunement être exhaustifs.