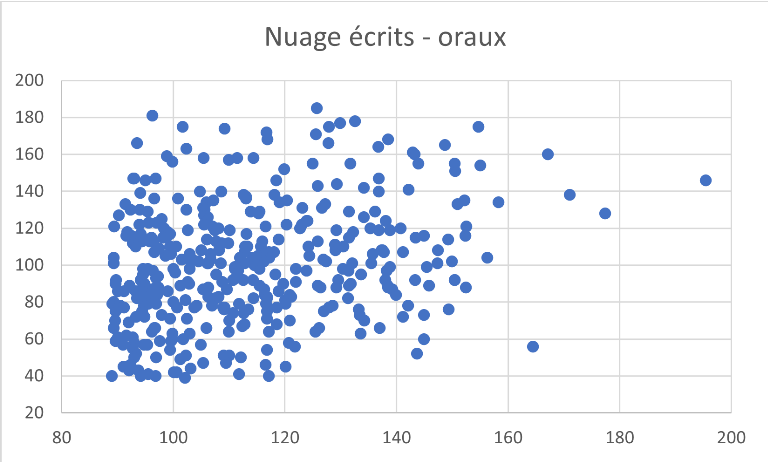
l'écrit sont reçus grâce à de bonnes prestations orales.



Le coefficient de corrélation entre les notes obtenues aux épreuves écrites et celles obtenues aux épreuves orales est de $28,1\%$.

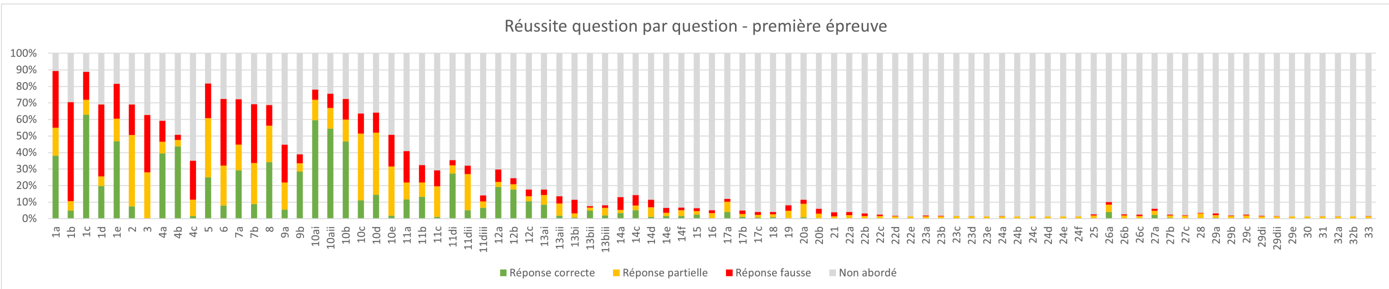
2 Rapport sur les épreuves écrites

2.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable sur le site du jury, à l'adresse
`https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/24-ep1.pdf`.
Des éléments de correction sont également téléchargeables sur ce site, à l'adresse
`https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/corrige_ep1_2024.pdf`.
Ces éléments de correction ne prétendent aucunement être exhaustifs.

2.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions. Pour chacune d'elle, la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge correspond aux réponses erronées.



2.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Le sujet de la première épreuve s'intéressait aux représentations sur $\mathbb{C}$ des groupes finis. La première partie était constituée de plusieurs exercices sur des sujets classiques (diagonalisation simultanée d'endomorphismes commutant deux-à-deux, exposant d'un groupe abélien) ainsi qu'un vrai-faux. La deuxième partie introduisait les définitions élémentaires de la théorie (représentations, sous-représentations, représentations irréductibles, homomorphismes), étudiait quelques exemples et se concluait par une démonstration du lemme de Schur. La partie suivante était consacré au théorème de Maschke. Le sujet se tournait ensuite vers le cas des groupes abéliens, avec l'introduction du groupe dual $\widehat{G}$, en particulier dans le cas des groupes cycliques. Ce groupe dual était utilisé dans la cinquième partie pour démontrer le théorème de Kronecker et la dernière partie étudiait les fonctions centrales pour démontrer la finitude du nombre de représentations irréductibles à isomorphisme près.

Passons maintenant en revue certaines questions du sujet.

Vrai-Faux

Rappelons qu'il est attendu une justification précise et détaillée dans ces exercices Vrai-Faux. Les candidats doivent bien noter qu'une réponse limitée à « c'est vrai » ou « C'est faux » ne rapporte aucun point. Ces exercices sont aussi l'occasion de constater que la notion de contre-exemple est souvent mal comprise. Par ailleurs, dans tout cet exercice, de nombreux candidats ont évoqué « la matrice de f », sans jamais évoquer la base dans laquelle cette matrice est considérée.

1. (a) Cette question basique, très abordée par les candidats, n'a été réussie que par moins de 40% d'entre eux. Parmi les erreurs les plus grossières relevées par les correcteurs :

— Certains candidats confondent inversibilité et diagonalisabilité et calculent le déterminant de la matrice : s'il est nul, alors la matrice est non diagonalisable, selon eux.
— Quelques candidats proposent une matrice diagonale comme exemple de matrice non diagonalisable.
— Certains candidats affirment que sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est diagonalisable car de polynôme caractéristique scindé à racines simples.

D'autres candidats affirment qu'une matrice donnée n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique n'est pas à racines simples, ce qui n'est bien sûr par un argument recevable. Enfin, certains candidats ont choisi une matrice réelle sans valeur propre réelle comme contre-exemple. Cela ne répondait pas à la question, le sujet précisant bien qu'on travaille sur $\mathbb{C}$.

1. (b) Dans la plupart des copies, la stabilité du supplémentaire que l'on recherche est oubliée et le candidat se contente d'exhiber un supplémentaire à l'aide du théorème de la base incomplète. On constate également de nombreuses confusions entre les notions d'espaces supplémentaires et complémentaires. Certains candidats évoquent également « le » supplémentaire d'un sous-espace. De nombreux candidats semblent penser qu'en dimension finie, le noyau et l'image d'un endomorphisme (qui sont certes des sous-espaces stables) sont toujours supplémentaires. Rappelons que si le théorème du rang assure que dans le cas où leur intersection est triviale, ils sont supplémentaires, rien n'assure, précisément, qu'ils soient en général en somme directe. De plus, certains candidats ont mal compris la question, ayant essayé de trouver un sous-espace vectoriel stable admettant un supplémentaire stable pour répondre que l'assertion était vraie. D'autres encore ont compris que l'assertion signifiait que tout sous-espace vectoriel d'un sous-espace stable devait lui même être stable.

1. (d) La plupart des contre-exemples proposés par les candidats ne sont des contre-exemples que parce que le candidat travaille sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, plusieurs candidats prennent la racine des valeurs propres sans se préoccuper de savoir si elles sont réelles et positives. On rencontre également beaucoup d'erreurs sur les racines carrées de matrices : ainsi, certains pensent que si dans une certaine base, A est la matrice de f^2 $et si A = D^2$, alors D est la matrice de f dans cette base.

2. Pour un nombre important de candidats, le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé à racines simples. On trouve souvent l'argument « f est diagonalisable donc son polynôme caractéristique annule f ». Rappelons que le polynôme caractéristique de f est toujours annulateur de f (théorème de Cayley-Hamilton).

4. (a) Les correcteurs ont plusieurs fois rencontré une rédaction du type suivant : « Soit F

un sous-espace propre de f_k. Alors si x appartient à F, il existe un nombre complexe λ_k tel que $f_k(x) = \lambda_k x$ ». Cette erreur de quantificateur met en doute la validité du raisonnement.

5. La plupart des candidats écrivent « $(g^d)^k = e$, donc g^d est d'ordre k » sans vérifier la minimalité de k.

7. (b) Plusieurs candidats écrivent « comme g et h sont premiers entre eux… ». L'erreur se propage alors à la question 8. Certains candidats écrivent également que si k et l sont premiers entre eux, alors les diviseurs de kl sont les éléments de l'ensemble $\{1, k, l, kl\}$. Cette confusion entre nombres premiers distincts et nombres premiers entre eux n'empêche cependant pas d'invoquer la propriété adéquate dans la récurrence de la question suivante.

8. Plusieurs candidats écrivent $|g_1 \dots g_n|$ pour désigner l'ordre de l'élément $g_1 \dots g_n$ sans avoir introduit cette notation, soulignant ainsi qu'ils confondent les notions d'ordre d'un élément et d'un groupe.

10. (a) i. Plusieurs candidats écrivent $\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(E)}$ pour l'élément neutre du groupe $\mathrm{GL}(E)$. Plusieurs candidats écrivent simplement Id, sans préciser de quel espace.

10 (a) ii. Beaucoup de candidats écrivent $\theta^{-1}(g)$ au lieu de $\theta(g)^{-1}$. Il semble par ailleurs que quelques candidats pensent qu'un homomorphisme de groupes doit être bijectif.

10. (b) De nombreux candidats ne savent pas quel axiome doit vérifier un homomorphisme de groupes et vérifient également le comportement par rapport au neutre et à l'inverse. D'autres confondent homomorphismes de groupes et applications linéaires. Il convient de préciser les lois de groupes dans la conduite des calculs : une écriture telle que « $f^{k+l} = f^k f^l$ » est imprécise et n'est pas acceptable.

10. (c) et 10. (d) Rares sont les candidats qui vérifient que l'application est bien définie. La vérification $\theta_2(\overline{k} + \overline{l}) = \theta_2(\overline{k}) \circ \theta_2(\overline{l})$ omet fréquemment le passage par $\theta_2(\overline{k+l})$. La notation incorrecte $f^{\overline{k}}$ est utilisée par plusieurs candidats, avec $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

11. (a) Plusieurs candidats écrivent qu'une application linéaire injective (ou surjective, au choix) en dimension finie est nécessairement bijective, ce qui est faux ! C'est vrai lorsque l'espace de départ et celui d'arrivée sont de même dimension finie, en particulier c'est vrai pour un endomorphisme en dimension finie.

11. (d) ii. Beaucoup de candidats donnent une base de F constituée de 3 vecteurs et la plupart n'en vérifient pas le caractère libre ou lié.

13. (b) iii. Les rares candidats qui traitent cette question écrivent très souvent

$$\mathrm{Tr}(\theta(g)h\theta(g^{-1})) = \mathrm{Tr}(\theta(g)\theta(g^{-1})h) = \mathrm{Tr}(h).$$

Certes, *a posteriori*, c'est correct.

26. (a) Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E il faut penser à s'assurer que F est non vide.

2.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable sur le site du jury, à l'adresse
`https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/24-ep2.pdf`.