# Chapitre 4

# Rapport sur les épreuves écrites

## 4.1 Première épreuve écrite

### 4.1.1 Enoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/Sujets/15-EP1.pdf

### 4.1.2 Remarques générales :

- A quelques exceptions près, la présentation et la rédaction des copies sont plutôt satisfaisantes et les candidats font preuve d'honnêteté intellectuelle lorsqu'ils sont en difficulté sur une question. On remarque cependant un certain nombre de copies où les lignes de calcul s'empilent sans aucun lien logique entre elles, en particulier pour les liens d'implication et d'équivalence. Dans un concours de ce niveau, on est en droit d'attendre une « vraie » rédaction dans le langage mathématique.
- L'énoncé faisait appel à des connaissances (élémentaires) sur les corps finis et celles-ci ont manifestement manqué à certains candidats.
- Il est à regretter que dans un nombre non négligeable de copies, la structure de $M_2(k)$ ne soit qu'imparfaitement connue, puisque certains pensent que c'est un anneau commutatif intègre ! La connaissance des définitions des sous-structures (sous-groupe, sous-anneau, sous-espace vectoriel) est également parfois insuffisante, ainsi que celles des morphismes correspondant à ces structures. De même les connaissances sur les groupes (ordre d'un élément, théorème de Lagrange, etc.) et les corps (définition, corps finis, etc.) sont trop souvent floues.
- Beaucoup de candidats utilisent abusivement le signe $\iff$ ; l'équivalence n'est pas toujours vraie, on oublie certaines conditions qui rendraient l'équivalence juste $\cdots$
- On peut constater sur un grand nombre de copies une mauvaise interprétation de la notion de morphisme ; il n'est vu le plus souvent que comme un morphisme d'espaces vectoriels (on attendait dans les questions 9, 12, 25 des morphismes d'anneaux qui étaient des morphismes de corps lorsque l'on était en présence de corps (commutatifs) à la source et au but).

### 4.1.3 Commentaires détaillés par partie

**PARTIE I**

1. Les questions 1 et 2, assez abstraites, ont été discriminantes.
2. Les erreurs les plus souvent rencontrées sont :

(a) L'interprétation de $x^d = 1$ comme une équation polynomiale de $k[X]$ n'est pas vue. Dans quelques copies, on trouve même que $x \in \ker f_d \iff x^d = 0$ !

(b) Le théorème de Lagrange ou le fait que pour un groupe fini, $x^{o(G)} = 1$ n'est pas toujours clairement mentionné. Le calcul était évident, mais il fallait citer la structure de groupe de $k^*$ et son ordre, pour justifier la réponse.

(c) On prouve $\mathrm{Im}(f_{d'}) \subset \ker(f_d)$, l'inclusion inverse est souvent mal faite, l'égalité des cardinaux via le 1er théorème d'isomorphisme n'est pas utilisée.

(d) cette question est bien réussie.

3. (a) et (b) Questions assez bien traitées en général. La plupart des candidats traitent ces questions par le calcul, plus ou moins adroitement (rares sont ceux qui ont reconnu le théorème de Cayley-Hamilton au (a)).

   (c) Beaucoup d'erreurs dans cette question, comme par exemple : « si un produit de matrices est nul alors une des matrices est nulle ». La condition $M$ d'ordre 4 est souvent ramenée à la seule condition $M^4 = I$. Pour beaucoup également, le fait que la caractéristique du corps est différente de 2, entraîne $M^2 \neq I$. Peu de candidats ont bien compris le rôle de l'hypothèse sur la caractéristique.

**PARTIE 2**

4. Question triviale, mais rarement traitée entièrement de façon satisfaisante, en général à cause d'une méconnaissance des définitions de sous-anneau, de sous-espace vectoriel et de base.
5. L'égalité des cardinaux de deux ensembles nécessite une bijection. Ceci est souvent trop vague dans les copies.
6. Question souvent traitée mais rarement entièrement correctement, le plus souvent à cause de la définition de morphisme d'anneaux. Il manque souvent le $\varphi(I) = I$, ou bien $\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.
7. Seulement la moitié des candidats ayant abordé la question a compris la nuance entre inversible et inversible dans $\mathcal{A}_a$.
8. Trop de candidats gèrent mal le quantificateur devant $x, y$, ne faisant pas la différence entre : $\forall x, y, (A \implies B)$ et "si $A$ est vrai pour tous $x, y$ alors $B$ est vrai". Ainsi, peu de candidats sont parvenus à mener à bien un raisonnement par équivalence. Les candidats ayant séparé les preuves des deux implications ont fait moins d'erreurs.
9. Une majorité de candidats n'a pas compris la question et parle d'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On peut voir par exemple $z \mapsto Re(z)I + Im(z)B$ qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels mais pas un isomorphisme de corps. Pour beaucoup, le terme isomorphisme désigne automatiquement une application linéaire bijective, alors que l'énoncé précisait bien le mot "corps". De fait, beaucoup ont posé $f(xI + yA) = x + iy$, mais elle ne vérifie pas la condition sur le produit, sauf si $a = -1$ (quelques rares candidats s'en sont rendu compte).
10. Comme à la question précédente, l'isomorphisme exhibé n'en est pas un (au sens bijectif ou de morphisme de corps). La question (a) est souvent abordée avec succès, sauf pour la justification de $b \neq -b$ que peu de candidats ont correctement faite, les autres n'ayant pas vu où intervenait la caractéristique différente de 2.
11. La question (a) est très rarement traitée et la (b) est plutôt bien réussie.

12. Vu le peu d'éléments, on pouvait dresser les tables de multiplication et d'addition. Cette solution, présente dans quelques copies, montrait une compréhension de la notion d'isomorphisme.
13. Les questions (a), (b) et (c) sont souvent abordées avec succès. Notons cependant dans quelques (rares) copies des erreurs grossières sur les puissances : on trouve parfois « $A^{2^{n+1}} = A^{2^n} \times A^2$», ou bien sur la trace : « $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A)^2$ ». Certains semblent ignorer la propriété du déterminant : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
    Pour la question (d), le fait que $A^{2^{n-2}}$ d'ordre 4 entraîne $A$ d'ordre $2^n$ n'est pas toujours détaillé. Beaucoup affirment que $\mathrm{card}(U(\mathcal{A}_a)) = p^2 - 1$ alors qu'il n'est pas précisé que $a$ n'est pas un carré.

**PARTIE 3**

14. (a) Question souvent abordée mais rarement de manière satisfaisante. Il y avait 4 points à vérifier : $F(I), F(NM), F(N+M)$ et $F(\lambda M)$. Il fallait mettre en avant la commutativité de l'anneau pour justifier les calculs des points 2 et 3 et rappeler que $p$ divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$. Pour le quatrième point, il fallait rappeler que $\forall \lambda \in \mathbb{F}_p, \lambda^p = \lambda$ (et non pas $\forall \lambda \in \mathbb{F}_p, \lambda^{p-1} = 1$ comme on l'a vu parfois).
    (b) Question triviale, mais beaucoup l'ont traitée avec une récurrence en montrant que $B^{2k+1} = a^k B$. Il était cependant maladroit de faire la récurrence sur $p$ !
    (c) Question assez mal réussie, certains s'embrouillent en cherchant à calculer $F \circ F(M) = M^{p^2}$, sans remarquer que $F(B) = 0$ et $F(I) = I$ . La notion de projecteur ne semble pas toujours bien connue.
    (d) Question assez bien réussie par ceux qui l'ont abordée.
    (e) La question (i) ne présentait pas de difficulté et la première partie de la question (ii) pouvait se faire par le calcul brut (assez peu ont utilisé que F est un morphisme d'anneaux). Par contre, si beaucoup ont vu qu'il fallait faire la somme et le produit des racines, personne n'a vu où utiliser le fait que le polynôme est irréductible. Quant à la question (iii), beaucoup ont cherché à utiliser le polynôme $P$ de la question précédente ...
15. Question rarement bien traitée.

**PARTIE 4**

16. Question d'arithmétique élémentaire mais rarement réussie de manière satisfaisante. Pour beaucoup, si $p$ est un nombre premier et si $p = ab$ alors on a une contradiction ! C'est oublier qu'un des facteurs pourrait être égal à 1...
17. Question élémentaire également, assez bien réussie en général.
18. Question rarement réussie. Pour beaucoup si $d$ divise l'ordre d'un groupe alors il existe forcément un élément d'ordre $d$, ce qui est faux en général.
19. Rarement réussie ; il fallait remarquer que $1 + b + b^2 = 0$ car $b^3 = 1$, mais encore fallait-il justifier que $b \neq 1$.
20. Question assez souvent abordée.
21. Question assez souvent abordée.

22. La question 22 n'a jamais été réussie, il fallait établir que $2^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^m - 1}$.
23. Question rarement abordée
24. Question élémentaire souvent abordée.

**PARTIE 5**

Cette partie a été très peu traitée même partiellement.

## 4.2 Seconde épreuve écrite

### 4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http ://agrint.agreg.org/Sujets/15-EP2.pdf

### 4.2.2 Thème

Le sujet proposait d' étudier différentes propriétés de la fonction $\Gamma$, puis d'appliquer ces résultats à une famille de variables aléatoires réelles positives ayant pour densités les fonctions $f_t(x) = \dfrac{x^{t-1}e^{-x}}{\Gamma(t)}, \qquad x > 0$.

### 4.2.3 Remarques générales :

Même si la fonction $\Gamma$ figure explicitement au programme, dès l'instant où une question demande de **démontrer** un résultat, fût-il un résultat de cours, le jury attend une preuve précise des affirmations des candidats.
La chasse aux points ( le grapillage!) ne permet pas de faire valoir ses compétences de réflexion sur la mise en place d'un raisonnement mathématique, ni de mettre en évidence le recul sur ses propres connaissances. Les barêmes ne favorisent pas un tel comportement, qui est à proscrire. Les candidats sérieux ont pu progresser en répondant de façon articulée et justifiée aux questions qui s'enchaînaient dans une difficulté croissante.
Le jury insiste sur l'importance attachée à la qualité de la rédaction. Les candidats sont invités à prendre le temps d'une relecture de leurs écrits, qui leur permettrait certainement de repérer de grossières erreurs. De même, il est nécessaire d'apporter des justifications correctes et complètes : après avoir rappelé le théorème que l'on souhaite appliquer, il faut prendre soin de bien vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites dans la situation étudiée. Cette dernière étape a été trop souvent oubliée, ou que partiellement menée à bien.
On regrette des difficultés avec les quantificateurs, qui peuvent être parfois mal utilisés.

### 4.2.4 Commentaires détaillés par partie :

#### Partie I.

1. Il s'agissait d'établir l'existence de la constante $\gamma$ d'Euler. L'étude de la suite proposée est classique, via une comparaison série/intégrale pour une intégrande décroissante et positive, qu' il convient de faire précisément. Le jury regrette que trop de candidats écrivent des inégalités fantaisistes.