Question 16

Cette question fut peu traitée. Si le théorème de relèvement est généralement bien invoqué pour justifier l'existence de α_z, la continuité de $F(z)$ est rarement correctement justifiée. La plupart des candidats croient que $\exp(i\alpha_z(0)) = F(0) = \exp(i\theta)$ entraîne $\alpha_z(0) = \theta$. Les rares qui ont cherché à établir l'unicité écrivent le plus souvent :

$$\text{si } \exp(i\alpha_z(t)) = \exp(i\beta_z(t)) \text{ alors } \alpha_z(t) = \beta_z(t) + 2k\pi,$$

mais ne se rendent pas compte que l'entier k dépend *a priori* de t et pensent montrer que celui-ci est nul simplement en évaluant en 0. Il fallait utiliser la continuité et le fait que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Question 20

Cette question a été assez bien traitée par les très rares candidats qui l'ont abordée, même si la périodicité de la fonction τ n'a pas toujours été mise en évidence.

4.2 Seconde épreuve écrite

4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/13-EP2.pdf

4.2.2 Généralités

Le thème

Dans ce problème, on a souhaité s'intéresser à la surjectivité de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a & \longmapsto & a \exp a \end{array},$$

où $(\mathcal{A}, \|.\|)$ représente une $\mathbf{C}-$algèbre de Banach. Pour simplifier, on est resté raisonnablement au stade de la dimension finie.
Dans la partie **I**, on montre l'existence d'une norme d'algèbre dans les algèbres de dimension finie puis on établit l'identité dite d'Abel.
Dans la partie **II**, On construit une réciproque locale de $a \longmapsto a \exp a$ autour de l'origine dans $\mathcal{A}$.
Dans la partie **III**, on traite la cas $\mathcal{A} = \mathbf{C}$.
Dans la partie **IV**, on traite la cas $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$.
Signalons que l'ensemble des fonctions continues sur le disque-unité fermé, somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$, muni de la norme infinie, constitue une $\mathbf{C}-$algèbre de Banach sur laquelle $a \longmapsto a \exp a$ n'est pas surjective.

Les ingrédients pour ce problème faisaient intervenir la topologie, les suites et séries de fonctions, série entière et série double.

Ce qu'en ont fait les candidats

La clarté, la rigueur, la précision et la concision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation des copies. De nombreux candidats perdent des points précieux dans les questions les plus accessibles du problème par des défauts de rédaction. L'utilisation des hypothèses données dans l'énoncé doit être signalée au moment opportun et non en vrac en début de question, afin de montrer l'articulation du raisonnement. Il faut que les futurs candidats soient persuadés qu'ils ne perdront pas de temps ni de points, bien au contraire, en proposant une rédaction complète et rigoureuse des questions qu'ils auront résolues (tout en sachant rester concis...).

4.2.3 Partie I-A

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats, mais mal comprise. On est conduit à regretter un grand manque de rigueur et de soin dans un début de problème. Il est bon de rappeler qu'en début de problème, il convient de mettre l'accent sur le soin et la précision. Les débuts de problème ou de partie de problème sont des questions abordables pour la plupart des candidats. Il faut alors éviter par exemple d'affirmer que les propriétés à démontrer sont évidentes. Bien sûr, il ne s'agit pas non plus de trop détailler et de redémontrer des résultats de cours. D'autre part, les problèmes d'agrégation sont volontairement de difficulté progressive et découpés en parties largement indépendantes pour permettre aux candidats de mettre en valeur leurs capacités. Si le grapillage est déconseillé, il est tout à fait possible qu'un candidat se sente peu à l'aise sur les notions développées dans une partie ou soit bloqué après une recherche sérieuse, lorsque la difficulté devient trop élevée. Le candidat a alors tout intérêt soit à regarder si les dernières questions de la partie, qui consistent souvent en une mise en application des résultats théoriques de la partie sur un exemple et sont abordables en admettant les résultats en question, lui semblent accessibles, soit à regarder si il se sent plus habile sur les parties suivantes. Malgré la progressivité du problème, les premières questions des parties sont à priori toujours de difficulté mesurée et peuvent être l'occasion pour un candidat de montrer ses capacités.

La question **1** a été traitée par la majorité des candidats et a révélé de profondes lacunes de vocabulaire. Des confusions sur la notion d'endomorphisme (bien sûr d'espaces vectoriels) et de bijection. Beaucoup de candidats se sont contentés de montrer l'additivité de σ_a.

La question **2** a été mal comprise car la norme proposée n'est pas nécessairement d'algèbre. L'argument de dimension finie n'a pas souvent été mis en évidence dans les copies.

La question **3** a été également mal comprise car l'argument de dimension finie n'a pas souvent été mis en évidence dans les copies.

Dans la rédaction de la question **4-a**, le candidat doit maitriser la définition d'une norme et quels sont les points délicats à vérifier.

Dans la question **4-b**, la vérification de la condition ii) a posé beaucoup de problèmes. De nombreux candidats ont utilisés à tort le fait que la norme proposée était déjà une norme d'algèbre.

4.2.4 Partie I-B

La question **5-a** a été traitée avec beaucoup de maladresse. Rappelons qu'en général, un développement limité ne se dérive pas.

La question **5-b** a été bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

La question **6-b** est plus délicate et a été rarement abordée.

4.2.5 Partie II

Pour la question **7**, la convergence absolue a été souvent mal justifiée. La majoration de la norme de la somme partielle ne permet pas de conclure. La continuité de chaque terme de la série ne suffit pas pour justifier la continuité de la somme de la série. On rappelle que l'utilisation d'un théorème de mathématique nécéssite la vérification rigoureuse de toutes ses hypothèses.

Dans la question **8-a**, là encore la convergence absolue a été souvent mal justifiée comme pour la question **7**.

La question **8-b** utilisait la formule du binôme. Bon nombre de candidats ont oublié de rappeler que l'hypothèse $ab = ba$ est requise pour cette identité.

La question **9-a** était élémentaire et a été souvent mal rédigé. Les hypothèses de continuité (théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection) et de dérivabilité sont souvent négligées.

Dans la question **10**, La convergence absolue est un argument essentiel, mal dégagé sur les copies. Trop de candidats croient qu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence.

La question **11-a** est convenablement traitée par ceux qui l'ont abordée.

La question **11-b** est une question pour laquelle il fallait faire attention aux indices de sommation. Celle-ci a rarement été bien traitée. Des candidats qui ont mené correctement leurs calculs, avec une erreur d'indice au départ, ont logiquement obtenu 0 pour $\omega(\Phi(a))$, au lieu de a comme dans l'énoncé.

La question **12-a** a révélé de profondes lacunes des candidats. La série définissant la fonction φ étant vectorielle, on ne pouvait utiliser ici les résultats généraux sur les séries entières. Il fallait démontrer la dérivabilité de φ en utilisant le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions. Parmi les candidats qui tentent de le faire, bien peu connaissent les hypothèses exactes de ce théorème. Trop de candidats pensent que la somme d'une série convergente de fonctions dérivables l'est également. Cela est faux, même si la convergence est uniforme.

Dans la question **12-d**, le point essentiel à vérifier est la dérivabilité de φ. Cela se fait grâce au théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions. Pour cela,

• il faut d'abord calculer la dérivée de la fonction $\varphi_n : t \mapsto \dfrac{\varphi(t)^n}{n!}$ pour chaque $n \geqslant 1$. Pour cela, il faut prendre garde au fait que l'identité

$$\varphi_n'(t) = n\varphi'(t)\varphi(t)^{n-1} \text{ pour } |t| < \rho$$

est vraie *parce que* $\varphi(t)$ *et* $\varphi'(t)$ *commutent pour tout* $t \in]-\rho, \rho[$.

• Il faut ensuite vérifier la convergence uniforme sur tout compact de $]-\rho, \rho[$ de la série $\sum \varphi_n'$.

La question **13-b** utilise les séries-produits. Les résultats relatifs au produit de Cauchy ne concernent que les séries absolument convergentes.

Dans la question **14-a**, il manque souvent un argument de continuité à l'origine.

4.2.6 Partie III

Dans la question **15-a**, de nombreux candidats permutent intégrale et somme infinie sans aucune justification. D'autres se contentent d'affirmations floues, voire fausses (la série entière étant de rayon de convergence infini, elle converge normalement sur **C**). Dans cette question, on avait besoin d'une convergence uniforme en la variable d'intégration t, sur l'intervalle compact $[0, 2\pi]$. Par ailleurs, trop de candidats croient que l'intégrale sur une période d'une fonction périodique est nulle.

La question **16-a** est rédigée avec des erreurs dues à des manipulations abusives sur les modules. Les hypothèses sur G sont de simples hypothèses de majorations, sans utilisation de module.

4.2.7 Partie IV

Cette partie a été très peu abordée à l'exception de la question **21**, souvent mal traitée. On regrette la tendance aux grapillages.

Quelques remarques positives en guise de conclusion :

Certaines copies sont tout simplement très agréables à lire (car très bien rédigées) et certaines (en très forte corrélation avec les précédentes) abordent bon nombre de questions de façon très correcte.