Rapport sur le sujet de Maths 2022
XUSR filière PSI

Le sujet explore certaines des subtiles et souvent difficiles propriétés des ensembles convexes et en donne deux applications : la dualité Lagrangienne en programmation linéaire et une propriété des systèmes linéaires sous-dimensionnés.

Le sujet s'est révélé très difficile pour les candidats et le jury a été contraint d'adapter les notations dans chaque question afin de récompenser ceux qui parvenaient à apporter des éléments de réponse pertinents. Dans le détail des questions :

Partie I

(1) On s'intéressait tout d'abord à la projection sur une partie convexe fermée non vide. Il s'agissait classiquement, pour l'existence, d'invoquer le théorème des bornes atteintes après s'être ramené à une partie compacte. Pour l'unicité, presque jamais abordée correctement, afin d'utiliser la convexité, l'identité du parallélogramme pouvait être utilisée.

(2) Un dessin permettait de comprendre la propriété géométrique demandée. Le sens direct a été souvent correctement abordé en revanche la réciproque, dont une preuve possible consistait à reprendre la démonstration classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, n'a pas été traitée.

(3) Il s'agissait de sommer deux inégalités de la question précédente et d'invoquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, question correctement traitée dans les bonnes copies.

(4) Une question élémentaire qu'il était dommage de négliger : des illustrations étaient utiles sinon nécessaires.

Séparation

(5) La convexité a été bien vue mais l'aspect fermé n'a presque jamais été abordé : l'approche séquentielle n'est peut être pas dans l'ADN de la filière PSI même si le théorème de Bolzano-Weierstrass était rappelé (en une courte phrase) en bas de la première page.

(6) Pour la séparation stricte, presque jamais abordée, il fallait considérer le projeté de 0 sur $D - C$ et utiliser la question (2).

(7) L'inclusion évidente a été vue contrairement à sa réciproque pour laquelle il s'agissait d'utiliser la question (6).

(8) Question encore plus difficile : il aurait fallu

- commencer par montrer que l'adhérence de A était convexe,
- invoquer la question (6) pour traiter le cas facile où $x \notin \overline{A}$,
- enchaîner avec le cas où x est dans l'intérieur en le séparant pour chaque $\lambda = 1/n > 0$ de $\frac{1}{1+\lambda}\overline{A}$ (après s'être ramené par translation au cas où $O \in A$) de sorte que la question (6) fournit un p_n qu'on peut rendre de norme 1. On en extrait alors une sous-suite convergente vers p qui va répondre à la question ;
- pour finir en traitant le cas où A engendre un sous-espace de dimension k.

Autant dire qu'aucun candidat n'a traité correctement la question, mais certaines copies ont su montrer une initiative intéressante qui a pu être valorisé.

Partie II : Points extrémaux

(9) Classique et assez bien traité par récurrence.

(10) Facile, il s'agissait essentiellement d'invoquer (9-b) : malgré tout de nombreuses imprécisions dans les copies.

(11) A nouveau un dessin était très utile : il fallait voir que $(0, 0, 0)$ était un point limite de points extrémaux mais qu'il n'était pas extrémal.

(12) Une nouvelle question très difficile, seul l'aspect convexe fermé a été traité.

- Quand $rg(\{p_i, i \in I(x)\}) < d$, il fallait prendre h orthogonal aux p_i pour lesquels $i \in I(x)$ puis vérifier, facilement, que $x \pm \epsilon h$ appartiennent à A pour $\epsilon > 0$ assez petit. On a trouvé l'argument dans de rares copies.

– Sinon, l'application linéaire $L : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^{I(x)}$ définie par $z \mapsto (p_i.z)_{i\in I(x)}$ est injective. Pour $x = (1-\lambda)y + \lambda z$, on montrait alors $L(y) = L(z)$ et donc $y = z$.

– Concernant le cardinal, on associe à chaque partie $I \subset \{1, \cdots, k\}$, l'application linéaire L_I qui à x associe $(p_i.x)_{i\in I}$ et on devait s'intéresser aux parties I telles que L_I est injective. On remarquait alors que pour deux points extrémaux x et x', l'égalité $I(x) = I(x')$ impliquait $x = x'$ ce qui permettait de conclure.

Cas d'un convexe fermé

(13) La première partie de la question a été correctement abordée dans les bonnes copies mais la dernière inclusion a été rarement vue.

(14) Il s'agissait de noter que la question précédente suggérait de raisonner par récurrence sur la dimension de l'espace engendré par K.

(15) La question était plus difficile : on note $\widetilde{K} = co(Ext(K))$ qui est donc un convexe contenu dans K. Par l'absurde si on avait $x \in K \setminus \widetilde{K}$, la question (8) permettait de séparer largement x de $\widetilde{K}$ (lequel n'est pas nécessairement fermé) via un point p. On montrait alors que $x \in K_p$ et, par récurrence sur la dimension, $x \in co(Ext(K_p)) \subset co(Ext(K_p))$ d'après la question (13).

Partie III : Un résultat de dualité

Cônes convexes

(16) Question bien traitée.

(17) Seul le sens trivial a été remarqué. Pour la réciproque il s'agissait essentiellement de séparer strictement, en utilisant la question (6), un éventuel $x \in E^{++} \setminus E$ de E puis d'aboutir à une contradiction.

(18) Seul l'aspect fermé était difficile. On pouvait se ramener à un compact en prenant les $\lambda_i \in [0,1]$ ou alors raisonner par récurrence sur k en distinguant les cas :

– pour tout $i = 1, \cdots, k+1$, alors $-\xi_i \in F_{\xi_1,\cdots,\xi_{k+1}}$ où alors $F_{\xi_1,\cdots,\xi_{k+1}}$ est un espace vectoriel,

– et sinon, pour $-\xi_{k+1} \notin F_{\xi_1,\cdots,\xi_{k+1}}$ et une suite $z_n = \alpha_n\xi_{k+1} + y_n \in F_{\xi_1,\cdots,\xi_{k+1}}$,
  * pour α_n bornée, qu'on fait converger vers α quitte à extraire une sous-suite, alors y_n converge vers $y \in F_{\xi_1,\cdots,\xi_k}$ d'après l'hypthèse de récurrence.
  * sinon, quitte à extraire une sous-suite, $\alpha_n \to +\infty$, et $y_n/\alpha_n \to -\xi_{k+1} \in F_{\xi_1,\cdots,\xi_k}$ ce qui est contraire à notre hypothèse.

Programmation linéaire

(19) Question facile mais très peu abordée ce qui n'est pas étonnant vu qu'on est loin dans le sujet. Il est tout de même dommage que les candidats perdus ne tentent pas de reprendre pied dans une nouvelle partie en utilisant les résultats admis des parties précédentes.

(20) Il aurait fallu ne pas se perdre dans les nombreuses notations ; question pas abordée sérieusement.

Partie IV : systèmes linéaires sous-déterminés

(21) Question simple parfois abordée, pas toujours parfaitement.

(22) L'aspect fermé borné a bien été vu mais pas la construction d'un élément qui pouvait se faire séquentiellement avec $x_n \in M^{-1}(\{b\})$ qui est un espace affine, et $||x_n|| \leqslant r + 1/n$.

(23-26) Ces questions n'ont pas été abordées.

Au final un sujet plutôt difficile où la démarche de construction d'éléments à l'aide de suites dont on extrait une suite convergente via le théorème de Bolzano-Weierstrass, devait permettre de résoudre de nombreuses questions notamment quand il s'agissait de manipuler des inf ou des sup plutôt que des minimum et maximum. Il fallait ensuite savoir illustrer par un dessin un énoncé à démontrer et exploiter les résultats intermédiaires (projection, séparation...) lors des questions suivantes plutôt que de se lancer dans la recherche d'une solution en partant de zéro.

Le jury a essayé de récompenser, dans chaque question, toute démarche/idée constructive afin de faire ressortir les meilleures copies sachant que les questions plus difficiles n'ont presque jamais été résolues complètement et rigoureusement.