

## Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLCR)

### Présentation du sujet

Ce sujet portait sur l'étude des simplexes (volume, points intérieurs, équivalence) par une approche de matrices à coefficients entiers.

Les trois premières questions mettaient en place le formalisme des matrices à coefficients entiers et préparaient l'étude de leurs propriétés. Ces résultats étaient ensuite utilisés pour montrer une décomposition particulière qui était utilisée par la suite dans l'étude des simplexes. La deuxième partie du sujet était consacrée à l'introduction de la notion de simplexe et à l'étude de leur volume et de leurs points entiers intérieurs. Enfin dans une dernière partie, la notion d'équivalence de simplexes était étudiée pour aboutir au théorème de la dernière question : modulo cette équivalence il n'existe qu'un nombre fini de simplexes ayant un nombre de points intérieurs entiers donné.

### Commentaires généraux

Ce sujet présentait de nombreuses définitions nouvelles qui ont posé des difficultés d'adaptation aux candidats. Par ailleurs, un grand nombre des candidats n'ont pas compris que les propriétés des matrices réelles ou complexes ne pouvaient être directement utilisées pour des matrices à coefficients entiers puisque  $\mathbb{Z}$  ne constitue pas un corps.

La qualité de la rédaction était généralement médiocre et les raisonnements utilisés souvent peu clairs. Les correcteurs tiennent à rappeler qu'une rédaction claire et structurée ainsi qu'une présentation adéquate des résultats sont des qualités importantes pour une copie, ou n'importe quelle démonstration mathématique. Ces facteurs ne doivent pas être négligés même si la contrainte de temps doit également être gérée convenablement. En particulier, Les correcteurs tiennent également à souligner la très mauvaise qualité de la rédaction des démonstrations par récurrence proposées dans l'énoncé ainsi qu'un manque de soin général de certaines copies.

Enfin, on rappelle que les questions sont dotées d'un coefficient d'autant plus fort qu'elles sont difficiles : la stratégie consistant à éviter les questions difficiles et à ne traiter que les questions les plus simples ne pouvant aboutir à une bonne note.

Notons que cette année, le sujet présentait une erreur à la question 6. En effet, l'utilisation de la transposée à partir de la question précédente fournit des inégalités dans le sens opposé à celui demandé par l'énoncé. Cette erreur n'a été remarquée que par une poignée de candidats, la très large majorité n'ayant absolument pas noté le problème.

Les correcteurs ont ainsi fait preuve de clémence dans la notation de cette question et ont récompensé les candidats qui ont pointé le problème. Nous tenons à rappeler ici que les candidats sont toujours invités à noter toute ambiguïté ou erreur qu'ils peuvent rencontrer lors de leur composition afin de faciliter la compréhension de leur raisonnement par les correcteurs. D'une façon générale ce problème n'a pas eu d'impact significatif sur l'évaluation des copies.

La répartition des notes des candidats français de l'École polytechnique est la suivante :

$0 \leq N < 4$	109	7,17 %
$4 \leq N < 8$	657	43,20 %
$8 \leq N < 12$	534	35,11 %
$12 \leq N < 16$	177	11,64 %
$16 \leq N \leq 20$	44	2,89 %
Total	1521	100 %
Nombre de copies : 1521		
Note moyenne : 8,31		
Ecart-type : 3,35		

## Examen détaillé des questions

*Question 1-a :* Beaucoup de candidats semblent ignorer l'expression de l'inverse d'une matrice en fonction de son déterminant et de sa comatrice.

*Question 1-b :* Nous avons rencontré à de nombreuses reprises le raisonnement vague et fantaisiste suivant : Si l'inverse de la matrice  $M$  est à coefficients entiers, alors le déterminant de  $M$  divise tous les coefficients de la comatrice de  $M$ . Il en résulte que le déterminant de  $M$  est nécessairement égal à 1 ou  $-1$ .

*Question 2-a :* De nombreux candidats n'ont pas compris la définition de  $GL_n(\mathbb{Z})$  donnée dans l'énoncé. Ils pensent que  $GL_n(\mathbb{Z}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$ . D'autres ont oublié une inclusion dans leur preuve. Un nombre important de candidats a essayé d'utiliser la question 1), ce qui n'était nullement nécessaire. Signalons aussi qu'un petit nombre de candidats a redémontré, en utilisant l'hypothèse  $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$  que la matrice  $M$  est inversible, ce qui est supposé dans l'énoncé. Les correcteurs apprécient une telle démarche qui témoigne d'une finesse certaine dans le raisonnement.

*Question 2-b :* Cette question a été totalement réussie dans un nombre assez faible de copies, en général les meilleures. Si la preuve de la condition nécessaire a été souvent traitée, l'argumentation manquait la plupart du temps de précision et de concision. Il suffisait en effet de dire que, comme  $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ , on a compte tenu de ce qui précède et de la définition de  $P$ ,  $M([0, 1]^n \cap \mathbb{Z}^n) = P \cap \mathbb{Z}^n$  et donc  $[0, 1]^n \cap \mathbb{Z}^n = M^{-1}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ , ce qui donne le résultat. La condition suffisante est plus délicate. Signalons que dans un bon nombre de copies, les candidats proposent une preuve qui n'utilise pas l'hypothèse, ce qui devrait les inciter à remettre en question leur solution.

*Question 3 :* Cette question de cours a été globalement bien réussie. La réponse donnée manquait parfois de clarté et de concision et le correcteur doit souvent lire et relire les explications de certains candidats pour savoir précisément ce qu'ils voulaient dire. En particulier les notations utilisées par les candidats pour les lignes et les colonnes sont parfois peu claires.

*Question 4-a :* Le nombre d'erreurs de signe dans le calcul du déterminant est impressionnant. Dans une moindre mesure, la multilinéarité a également posé certaines difficultés.

*Question 4-b :* De nombreux candidats n'ont pas dit clairement comment ils choisissent  $u$  et  $v$ . Plus nombreux sont ceux qui ont oublié de vérifier que la matrice proposée est bien à coefficients entiers.

*Question 5-a :* Un bon nombre de candidats pense que  $\mathbb{Z}^n$  est un espace vectoriel. D'autres que  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{Q}$ . Ces deux postulats ont conduit à des raisonnements faux. Dans un bon nombre de copies, on affirme qu'une certaine famille est liée sans préciser le cadre dans lequel on se place. Il était impératif ici de bien préciser que l'on se plaçait dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ .

*Question 5-b :* Les candidats ont souvent précisé le choix de la première colonne de la matrice  $A$ . Plus rares sont ceux qui ont bien expliqué que la question 4 assurait l'existence d'une matrice vérifiant toutes les hypothèses souhaitées.

*Question 5-c :* La rédaction des candidats manquait de précision : le correcteur attend une expression précise des matrices de transvections utilisées et une argumentation précise pour justifier l'appartenance de la matrice  $A$  à  $GL_n(\mathbb{Z})$ , faisant référence à sa structure de groupe.

*Question 5-d :* La rédaction de cette question a été négligée dans un bon nombre de copies. Rares sont les candidats qui ont pris le temps de mentionner précisément la propriété qu'ils souhaitent prouver. L'argumentation précise qui justifie la propriété importante à prouver, à savoir le fait que les coefficients diagonaux soient dominants sur leur ligne, a été souvent absente ou inexacte. Rappelons que les démonstrations par récurrence doivent être proprement écrites et argumentées (on ne peut se contenter de dire que l'hérédité est évidente d'après les questions précédentes par exemple) même si cela prend du temps. En particulier ces qualités sont valorisées par les correcteurs dans la notation.

*Question 6 :* Cette question présentait une erreur d'énoncé puisque la transposée de la question précédente aboutissait à des inégalités en sens opposé à celui demandé. Les correcteurs ont donc été clément dans la notation de cette question même si seulement une poignée de candidats (qui ont été récompensés) se sont aperçus du problème.

*Question 7-a :* Quelques erreurs sont à signaler : l'image d'un fermé par une application continue n'est pas toujours un fermé. Si on restreint l'ensemble de définition d'une application continue à un domaine  $D$ , alors l'image réciproque d'un fermé de l'espace d'arrivée est un fermé de  $D$  et non de tout l'espace de départ en général. C'est le cas si  $D$  est une

partie fermée de l'espace de départ, mais il faut le préciser. D'une façon générale, beaucoup de candidats mélangent les propriétés d'images directes et réciproques de fermés et de compacts par des applications continues.

*Question 7-b* : Cette question a été très souvent mal rédigée.

*Question 8-a* : Les exemples fournis sont corrects en général. Nous avons eu tout de même un bon nombre d'exemples de simplexes non entiers.

*Question 8-b* : Les réponses correctes se trouvent souvent seulement dans les meilleures copies. Nous avons eu un bon nombre de réponses non justifiées. Dans un bon nombre de copies, les candidats n'ont pas vu la différence avec la question précédente : il s'agit ici de trouver un simplexe sans point entier autre que les sommets et non seulement sans point intérieur entier.

*Question 9-a* : La réponse : l'ensemble est convexe comme  $\mathcal{K}$ , nous semble un peu courte compte tenu de la question. Le correcteur attend une preuve élémentaire au niveau de la question posée.

*Question 9-b* : Il est attendu également des candidats qu'il justifient l'existence d'un  $\lambda > 0$  vérifiant  $-\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$  et aussi l'existence d'un élément non nul dans  $\mathcal{K}$ .

*Question 9-c* : La seconde partie de la question a été souvent traitée trop rapidement. Là encore vu la question posée, le correcteur attend une justification précise, complète et convaincante.

*Question 10-a* : Signalons un oubli fréquent de la valeur absolue dans la première partie de la question. L'argumentation de la dernière partie de la question manquait souvent de précision et de clarté.

*Question 10-b,c* : Ces questions difficiles n'ont quasiment pas été traitées par les candidats et les très rares copies présentant des réponses correctes ont été valorisées.

D'une façon générale, les questions de la troisième partie ont été traitées dans un nombre faible de copies. Certains candidats ont néanmoins réussi convenablement les questions 11 et 12 qui étaient plus accessibles bien que nécessitant une rédaction précise.