C Mathématiques 1 PC

Q1 - Pour la première implication, le caractère non nul d'un vecteur propre n'est pas toujours précisé. Pour la deuxième, la démarcation s'opère entre les candidats qui citent complètement le théorème spectral (en précisant le caractère orthogonal de la matrice de passage, ou le caractère orthonormé de la base propre) et les autres. Contrairement à ce que semblent croire certains candidats, la positivité de $< Ax, x >$ pour x vecteur propre n'entraîne pas directement la positivité pour tout vecteur x.

Q2 - Beaucoup de candidats omettent la vérification de la stabilité de $S_n(\mathbb{R})$ par combinaison convexe. Le caractère convexe de $S_n^+(\mathbb{R})$ est assez souvent correctement établi, celui de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ reçoit majoritairement un traitement trop peu soigneux.

On attendait des exemples précis pour justifier que $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels, le plus simple, convenant pour les deux ensembles, étant celui de la matrice $-I_n$. Le cas de $S_n^+(\mathbb{R})$ a rarement reçu une solution satisfaisante.

Q3 - Les candidats proposent en général une matrice solution obtenue en diagonalisant A ; mais beaucoup omettent de vérifier sa symétrie et son caractère défini positif. Le caractère symétrique repose de manière cruciale sur le caractère orthogonal de la matrice de passage.
Noter une matrice $D^{1/2}$ sans explication ne constitue pas un argument.

Q4 - Cette question, assez souvent abordée, s'est révélée très discriminante. Peu de candidats ont su correctement mener à bien la récurrence sur n, faute de tenir compte de la condition $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Q5 - Il y avait plusieurs arguments à donner :

- concavité de log sur $\mathbb{R}^{+*}$;
- expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres ;
- inégalité de Jensen, qui concluait la preuve dans le cas défini positif ;
- vérification directe dans le cas non défini.

Les premiers points ont souvent été bien traités. Toutefois, une minorité de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité ; parmi eux, certains poursuivent des calculs qui n'aboutissent pas, et semblent croire que l'absence de conclusion va fourvoyer le correcteur. Le dernier point a rarement été évoqué.

Q6 - Beaucoup de copies donnent l'expression correcte de $\|M\|_2$. Les justifications sont cependant parfois incomplètes, voire absentes.

Q7 - L'inégalité découle de la question 6. La preuve n'est pas toujours complètement convaincante, notamment en ce qui concerne le lien entre $\max(x_1, \ldots, x_n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2$.

Q8 - Cette question, conséquence classique de la coréduction de deux formes quadratiques, est difficile dans le cadre du programme actuel de la filière. Elle joue un rôle important dans la suite du sujet et aurait clairement mérité une indication. En l'état, elle n'a été traitée que par une poignée de candidats, parmi les meilleurs. À noter que les termes diagonaux de D ne sont pas les valeurs propres de B, la relation entre les deux matrices n'exprimant pas la similitude.

Q9 - À nouveau (question 5), une minorité non négligeable de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde et produisent des calculs non concluants. D'autres y pensent, mais produisent un calcul faux. La question est tout de même bien traitée dans beaucoup de copies.

Q10 - Cette question demandait un certain recul. Il fallait en effet utiliser les questions 8 et 9, ce qui n'était pas indiqué. Elle a été traitée par un certain nombre de bons candidats.

Q11 - La question demandait à nouveau du recul. Elle a été un peu plus réussie que la précédente. Le cas non défini demandait une vérification complémentaire simple, rarement vue.

Q12 - Beaucoup ont vu le « passage au logarithme ». Il fallait préciser que la fonction était bien définie (déterminant strictement positif) et conclure à la concavité, non à la convexité !

Q13 - La question a été assez souvent bien traitée par les candidats l'ayant abordée. Certaines copies aboutissent cependant à un résultat faux, faute de dextérité dans l'usage du polynôme caractéristique.

Q14 - La bonne définition de f sur $\mathbb{R}^+$ est le plus souvent absente. Les candidats ayant obtenu le résultat correct à la question précédente ont généralement réussi à conclure en employant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$.

Q15 - Question souvent traitée quand elle est abordée, soit via le caractère polynomial du déterminant, soit à l'aide de la question 8.

Q16 - Cette question, assez délicate, a très rarement reçu une solution satisfaisante. Certains candidats connaissaient le caractère ouvert de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ont correctement appliqué ; il était toutefois nécessaire, si l'on procédait ainsi, de vérifier ladite ouverture, qui n'est pas un résultat du programme. La question 8 donnait ici une approche plus directe.

Q17 - Le cas de $A = I_n$ est traité par certains étudiants, en lien avec la question 13. Le cas général, immédiat par factorisation à partir du précédent, a moins de succès.

Q18 - Question rarement traitée correctement. Dans quelques copies, la réponse est avancée sans aucune justification.

Q19 - Très peu de réponses correctes, en dépit de l'indication. Employer le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = A$ ne constitue pas une réponse correcte.

Q20 - La justification de la dérivabilité est rarement complète : la stricte positivité de la fonction sur l'intervalle considéré intervient et doit être mentionnée.

Q21 - Question non immédiate, car demandant quelques calculs. Venant très tard dans le problème, elle n'a quasiment jamais été traitée.

Q22 - Question rapide à traiter avec l'indication, mais venant très tard, qui n'a quasiment jamais été traitée.

Q23 - et **Q24 -** n'ont pratiquement pas reçu de réponse valable.

🡅RETOUR