A2022 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \longmapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\ ;\ \|X\| = 1\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}$. Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $X^T M Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M, $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M. Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leq 1\}.$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1 ▷ Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \longmapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\text{op}}$.

Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \qquad \|M\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|}\ ;\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\} \right\},$$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \qquad \|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longmapsto \|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2 $\triangleright$ Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, montrer que

$$\max\{|V^T U|\ ;\ V \in \Sigma_n\} = \|U\|.$$

En déduire que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors

$$\max\{|X^T M Y|\ ;\ (X,Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\} = \|M\|_{\mathrm{op}}.$$

2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $\left(\|M^k\|_{\mathrm{op}}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup\{\|M^k\|_{\mathrm{op}}\ ;\ k \in \mathbf{N}\}.$$

3 $\triangleright$ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Montrer que la suite $(\|M^k X\|)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Si $\lambda \in \sigma(M)$, si X est un vecteur propre de M associé à λ, exprimer pour $k \in \mathbf{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de λ, k et X. En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.

4 $\triangleright$ On suppose que $n \geq 2$. Indiquer, avec justification, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à $\mathcal{B}_n$.

3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On dit que l'élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$ si, pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \qquad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \tag{$\mathcal{P}$}$$

5 $\triangleright$ Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifient $\mathcal{P}$. On commencera par le cas des matrices diagonales.

6 ▷ On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$. En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \qquad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}.$$

7 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.

On admettra le fait suivant : soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie; si $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans E.

Si $m \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $(zI_n - M) \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{M^j}{z^{j+1}}$.

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M \ : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \longmapsto (|z| - 1)\ \|R_z(M)\|_{\mathrm{op}}.$$

8 ▷ Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \qquad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}, \qquad \varphi_M(z) \leq b(M).$$

Soit $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j\ e^{-i(j+1)t}.$$

9 ▷ Justifier l'existence et la continuité de la fonction u.

Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\ e^{i(k+1)t}\ \mathrm{dt} = c_k.$$

10 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in]1, +\infty[$ et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

Si $k \in \mathbf{N}$, en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

4 Variation totale et norme uniforme

Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbf{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\ ;\ t \in [-\pi,\pi]\} \quad \text{et} \quad V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

11 ▷ En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément C de $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1, \qquad V(f) \leq C\ \|f\|_\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $]-\pi,\pi[$ en lesquels la fonction f' s'annule est fini. On note ℓ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell \geq 1$, on désigne par $t_1 < \cdots < t_\ell$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0 = -\pi$ et $t_{\ell+1} = \pi$.

12 ▷ Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Pour $0 \leq j \leq \ell$, soit ψ_j la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\{0,1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j), f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbf{R} \setminus [f(t_j), f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j.$$

13 ▷ Si $y \in \mathbf{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell+1$; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y \in \mathbf{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y), \ldots, \psi_\ell(y)$. En déduire l'inégalité

$$(2) \qquad V(f) \leq 2\ \max\{N(y)\ ;\ y \in \mathbf{R}\}\ \|f\|_\infty.$$

5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P \in \mathbf{C}[X]$ et $Q \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que P et Q n'aient pas de racine commune dans $\mathbf{C}$; si tel est le cas, les racines de Q dans $\mathbf{C}$ sont, par définition, les pôles de F. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\mathbb{U}$ de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F \in \mathcal{R}_n$, P et Q deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$ vérifiant $F = \dfrac{P}{Q}$ et

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad Q(z) \neq 0.$$

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + ih(t) \quad \text{où} \quad (g(t), h(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour $u \in [-\pi, \pi]$, on définit une fonction f_u de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_u(t) = g(t)\cos(u) + h(t)\sin(u) = \mathrm{Re}(e^{-iu}F(e^{it})) = \mathrm{Re}(e^{-iu}f(t)).$$

14 ▷ Dans cette question, on fixe $u \in [-\pi, \pi]$ et on suppose que f_u n'est pas constante. On fixe également $y \in \mathbf{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu}F(e^{it})$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S \in \mathbf{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_u(t) = y \iff S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble ${f_u}^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

15 ▷ En observant que la fonction $|\cos|$ est 2π-périodique, calculer, pour $\omega \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| \,\mathrm{d}u.$$

En déduire que, si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a\cos(u) + b\sin(u)| \,\mathrm{d}u = 4\sqrt{a^2 + b^2}.$$

16 ▷ Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

en fonction de $V(f)$.

17 ▷ On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u.$$

On admet aussi que, pour $u \in [-\pi, \pi]$ tel que f_u ne soit pas constante, l'ensemble des points de $]-\pi, \pi[$ en lesquels la fonction ${f_u}'$ s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14 ▷).

En déduire l'inégalité

$$(3) \qquad V(f) \leq 2\pi\, n\, \|f\|_\infty.$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M \in \mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M) = \sup\left\{\varphi_M(z)\ ;\ z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}\right\}.$$

et entraîne que $b'(M) \leq b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.

Dans les questions 18 ▷ et 19 ▷, on fixe $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in {\Sigma_n}^2$. Pour $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$, on note

$$\mathbb{D}_\rho = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leq \rho\}.$$

18 ▷ Montrer qu'il existe un élément F_r de $\mathcal{R}_n$ dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}, \qquad |F_r(z)| \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t.$$

19 ▷ En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17 ▷, montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad |X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)\,(r-1)}\, n\, b'(M).$$

20 ▷ Démontrer finalement l'inégalité

$$(4) \qquad b(M) \leq en\, b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante *en* est asymptotiquement optimale.

Fin du problème