

Q 14. Question centrale, souvent abordée. La rédaction n'est pas toujours satisfaisante : l'inégalité triangulaire est souvent escamotée, le rôle de la positivité des coefficients mal expliqué. De très grosses confusions dans certaines copies faibles (les coordonnées de AX sont incorrectes).

Q 15. Cette question, souvent abordée, demandait du soin et a rarement été complètement traitée. Une réponse correcte demandait de préciser le caractère stochastique de A^p (conséquence de Q11) et d'écrire précisément les inégalités, en mettant en lumière l'importance de la stricte positivité des coefficients.

Q 16. Pas mal de réponses aberrantes et de confusions (je prends $p = 1$) ; assez rares sont les candidats qui dégagent nettement les éléments la preuve (l'inclusion triviale vient de Q11, l'autre de l'inclusion du noyau de $A - I_n$ dans celui de $A^p - I_n$ et de la question précédente).

Q 17. Question facile, qui pouvait être traitée de diverses façons, honorablement réussie et a permis des grappillages de points. Mais encore une fois, oubli assez récurrent de la positivité.

Q 18. Question de synthèse, traitée avec efficacité dans les bonnes copies, mais souvent réduite à un empilement d'affirmations sans références précises aux questions antérieures.

Q 19. Beaucoup de candidats se rappellent un exercice traité en classe (description des matrices de rang 1 comme produit colonne-ligne sans voir qu'ici U est imposée (comme image de P), ce qui nécessitait un bon recul. On relève beaucoup de fautes de logique, consistant à prétendre prouver l'égalité à partir du fait que UL vérifie des propriétés analogues à celles de P .

Q 20. Cette question demandait également un bon recul sur le sujet. Seules les très bonnes copies produisent des réponses satisfaisantes et on observe beaucoup de tentatives (infructueuses) de bluff. L'unicité est très rarement traitée.

Q 21. Cette question demandait de bien comprendre le sujet. À partir de l'égalité $LA^p = L$, la stricte positivité des coefficients de A^p fournissait le résultat. Peu de candidats l'ont vu.

Q 22. Question délicate, très rarement résolue. Confusion fréquente entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre.

QQ 23-24. Quelques rares candidats ont montré qu'ils avaient bien compris le thème du problème en répondant correctement à cette question. Certains n'ont pas réalisé que le calcul de la loi invariante avait été fait dans la partie I.

1.2.4. Mathématiques II — PC

- Remarques générales

Le problème proposé était consacré à une estimation du temps moyen de première répétition d'un processus aléatoire simple. Pour obtenir cette estimation, on commençait par établir quelques résultats asymptotiques liés aux sommes partielles de la série exponentielle.

Le sujet avait été conçu pour être abordable et raisonnablement progressif, mais le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions de base n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Le sujet était composé de 5 parties, les 4 premières aboutissant à une estimation de $T_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ et la dernière étant probabiliste.

- Remarques particulières

Première partie

- À la question 2, une petite moitié de candidats sait écrire correctement la formule de Taylor avec reste intégral.
- Dans la question 3, un trop grand nombre de candidats croit que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1$. Par ailleurs, la minoration par 0 d'une suite décroissante n'implique pas sa convergence vers 0. Dans cette même question la règle de d'Alembert – très souvent invoquée à juste titre par les candidats – est souvent présentée comme une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.
- Dans la question 4, beaucoup d'erreurs dans la dérivation de $u \mapsto ue^{-u}$.

Deuxième partie

- À la question 8, la plupart des candidats notent que la fonction f présente un maximum local en 0, mais oublient de préciser qu'0 est un point *intérieur* de l'intervalle de référence pour pouvoir conclure correctement que $f'(0) = 0$.
- La question 9 a été très rarement bien traitée. En général, une fonction continue sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ et strictement positif n'est pas minorée par un réel strictement positif.
- À la question 10 la continuité par morceaux de g_n a rarement été correctement justifiée, la définition en étant manifestement très floue dans l'esprit de la majorité des candidats. Il suffisait d'étudier les limites à gauche/droite de g_n en $\pm\sqrt{n}$ (à n fixé bien entendu). Rappelons que la régularité continue par morceaux n'est pas stable par composition. Par ailleurs, beaucoup de candidats majorent étonnamment $g_n(u)$ pour montrer la convergence demandée.
- À la question 11, un certain nombre de candidats se contente d'invoquer "la formule de l'intégrale de Gauss" pour justifier le passage à la limite sous le signe intégral, en lieu et place d'une application du théorème de convergence dominée auquel le texte conduisait naturellement.

Troisième partie

- À la question 13, de trop nombreux candidats se trompent dans le calcul de la dérivée de $x \mapsto 2^x$.
- À la question 14, il convenait de vérifier avec soin que la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ vérifie les hypothèses de la partie II.
- À la question 15, il était insuffisant d'affirmer que $J_n \rightarrow 0$ pour en déduire que $I_n + J_n \sim I_n$, mais il fallait expliquer pourquoi $J_n = o(I_n)$.

Quatrième partie

- À la question 17, le passage de l'estimation de $R_n(1)$ à celle de $T_n(1)$ n'a pas été toujours correctement justifié.

Cinquième partie

- Dans la question 18, beaucoup de candidats introduisent de l'aléatoire dans l'algorithme avec une fonction random ou randint.

- La question 19 a été rarement bien traitée, et le jury a regretté de lire le plus souvent de longs développements confus, alors qu'il suffisait d'exhiber un événement de probabilité strictement positive inclus dans l'événement $(X = k)$.
- Dans la question 20, trop de candidats écrivent sans justification l'égalité $P(X > k+1, X > k) = P(X > k+1)$ sans en donner la raison : l'inclusion $(X > k+1) \subset (X > k)$.
- La question 22 (de cours) a été traitée moins souvent qu'attendu.

- Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. Par exemple, il est louable de montrer la convergence des intégrales rencontrées, ou de justifier la possibilité de faire tel changement de variable. Mais cela doit prendre quelques lignes, et non quelques pages...
- Soigner la rédaction : les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Consolider sa maîtrise des techniques asymptotiques : le jury a à ce sujet déploré des limites quand $n \rightarrow +\infty$ qui dépendaient de n , des développements limités sans reste, ou encore des manipulations douteuses des équivalents.
- Écrire proprement, et mettre en valeur les arguments et résultats essentiels grâce à une présentation soignée. Les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse ont été lourdement pénalisées.
- Ne pas "tricher" : les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte.

- Conclusion

Le jury s'est réjoui de lire un certain nombre de copies vraiment excellentes, qui témoignent d'une grande maturité scientifique et d'une réelle autonomie intellectuelle. Toutefois, dans la plupart des cas, les candidats ont manifesté, souvent faute d'une attention suffisante, des faiblesses qui étaient évitables, aussi bien dans les parties théoriques (convergence dominée, extrême d'une fonction continue sur un segment) que calculatoires. Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Ce sujet comportait beaucoup de questions simples et quelques questions délicates. Il est alors impératif de faire extrêmement attention à la rédaction : entre une moyenne et une bonne copie, la différence se joue parfois à ce qui peut apparaître comme des détails qui révèlent la compréhension ou entretiennent le doute (voir notamment les questions 4, 11 et 14).