ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+3)}.$$

2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\,\alpha\,.$$

3. Espérance et variance de X

3.1. Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*

3.2. Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

3.3. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.

2. Soit p un entier non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

3. Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall\, x \neq 1,\quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.

6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
Déterminer A et A^{-1}.

7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.

8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E_n.
À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ *et* $\alpha \neq 1$.

10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.

11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

EXERCICE 3

1. Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$.

* * * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0\,. \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n+1} et a_{n-1}.

2.2. Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

2.3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \;\mapsto\; F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(2x\cos(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F

3.1. Étudier la parité de la fonction F.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

3.2. Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp\left(2x\cos(t)\right)$.

3.2.1. Justifier que h est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.2. Prouver que pour k non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant M_k\,.$$

3.2.4. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

3.3. Démontrer que F vérifie la relation $(**)$.

4. **Développement en série entière de F**

4.1. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

4.2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\, x^n$$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4.3. Calculer J_0 et J_1.

4.4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

4.5. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

4.6. Comparer alors les fonctions F et g.

EXERCICE 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note enfin $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours**

Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * * *

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda\, I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer UV et VU.

2.2. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^T M = R^T\, M M^T\, R$.

Partie 2

On note Δ_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice Q dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T\, M\, Q = M^T$. Une telle matrice M sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n\,.$$

5. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est inclus dans Δ_n .

6. Démontrer que : $\forall\, A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall\, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe une matrice $T \in O_n(\mathbb{R})$, une matrice D diagonale et une matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}.$$

8. Cas $n = 2$: on démontre que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*

8.1. Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8.2. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Déterminer alors une matrice W orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

8.3. En utilisant la question **7**, démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

9. On revient au cas général et on suppose à présent que n est impair
Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$.

9.1. Montrer que si $M \in \Delta_n$, alors $[M^T, M]$ est semblable à son opposée.

9.2. En déduire que si $M \in \Delta_n$, alors $\det\big([M^T, M]\big) = 0$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1180 – D'après documents fournis