CORRECTION

Exercice 1.

1. On reconnaît une série alternée.

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0.

Alors, d'après le critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge}}$

2.

2.1. Nous allons appliquer, comme l'indique l'énoncé, le Théorème d'intégration terme à terme.

On remarque tout d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Alors, d'après le cours, comme :

- pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ qui est une série géométrique de raison $x^2 \in [0,1[$ et ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}(1-x)$ de fonctions continues sur $[0,1[$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $x \mapsto (1-x)\cdot\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+x}$;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge car $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}}$$

2.2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2N+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2N+2} \frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}
\end{aligned}$$

On fait alors tendre N vers l'infini, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x)\, \mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \text{ d'après la question précédente.}$$

Il reste à calculer cette intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$ pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$$

3. Il s'agit dans cette question de déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série proposée converge.

Cela revient à trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Par exemple :

• Si $|x| > 1$, alors la suite $\displaystyle\left((-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Ainsi, la fonction φ n'est pas définie pour $|x| > 1$.

• Si $|x| < 1$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |x|^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi, dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente et φ est au moins définie sur $]-1,1[$.

• Si $x = 1$, d'après la question **1.**, $\varphi(1)$ est bien définie et $\boxed{\varphi(1) = \ln(2)}$

• Si $x = -1$, le terme générique de la série proposée s'écrit $\displaystyle(-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$ qui est le terme générique d'une série qui diverge.

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]-1,1]}$

4.

4.1. Le dénominateur de la fraction rationnelle à intégrer étant $1+x^2$, dans le cours, on sait intégrer soit $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}$, soit $\displaystyle\frac{2x}{1+x^2}$. Il faut donc faire apparaître ces deux fractions rationnelles :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \\
&= [\arctan(x)]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)
\end{aligned}$$

4.2. - Une première façon de calculer la somme proposée est de faire comme dans la question **2.1.** en appliquant le théorème d'intégration terme à terme :

- $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ est absolument convergente.

- On remarque ensuite que pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x) = (1-x)\cdot\frac{1}{1+x^2}$,

et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x\right) &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

\- Mais on peut aussi commencer par calculer l'intégrale dans la somme :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
En conclusion, on a donc :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 2.

Question de cours

Soit a un nombre réel. On note $I =]-\infty, a[$ et f une fonction continue et intégrable sur I.

1. Comme la fonction f est continue sur I et d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F_1 est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F_1'(x) = f(x)$.

   $\hookrightarrow$ Pour bien voir ce dernier résultat : si H est une primitive de la fonction f sur I (qui existe puisque f est continue sur I), alors $F_1(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = H(x) - H(a)$.

   Comme $H(a)$ est une constante, il vient naturellement : $\boxed{\forall\, x \in I,\ F_1'(x) = H'(x) = f(x)}$

2. Comme f est continue et intégrable sur I, la fonction F est bien définie sur I.

   L'idée est de se ramener à la question précédente.

   On va couper cette intégrale en deux morceaux en introduisant un $b \in I$.

   Alors, pour tout $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(x)\,\mathrm{d}t$.

   Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante et donc, d'après la question précédente, la fonction F est de classe C^1 sur I et pour tout $\boxed{x \in I,\ F'(x) = f(x)}$

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soient $k \in \mathbb{N}$.

La fonction f_k est continue sur $]-\infty, -1]$.

On a facilement $|f_k(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

On en déduit (Théorème de comparaison) que : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ f_k \text{ est intégrable sur }]-\infty, -1]}$

$\hookrightarrow$ Noter que cela entraîne que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur tout intervalle $]-\infty, c]$ où c est un réel quelconque : il suffit d'écrire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{c} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

4. • On commence par vérifier que l'application L est bien définie :

Pour toute fonction f de E_n, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est une combinaison linéaire des $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

En utilisant alors la question précédente, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, x]$ pour tout réel x, ce qui prouve que **l'application L est bien définie**.

• Prouvons la linéarité de L :

Soient f et h deux éléments de E_n et λ un réel. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
L(\lambda f + g)(x) &= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\
&= \lambda L(f)(x) + L(g)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, L **est une application linéaire**.

$\hookrightarrow$ On aurait aussi pu dire que la linéarité de L découlait directement de la linéarité de l'intégrale.

Conclusion : $\boxed{L \text{ est une application linéaire sur } E_n}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ étant continue et intégrable sur $]-\infty, x]$, en utilisant la question de cours, on obtient que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par suite, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus, toujours d'après la question de cours, pour tout réel x, $g'(x) = -g(x) + \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{e}^{x} = -g(x) + f(x)$.

Cela revient à dire que : $\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle : } y' + y = f(x)}$

6. Une fonction f est dans $\mathrm{Ker}(L)$ si et seulement si $g = L(f) = 0$.

Or d'après la question précédente, $g = L(f) \iff g' + g = f$.

Ainsi, $f \in \mathrm{Ker}(L) \iff f = 0_{E_n}$ où 0_{E_n} est la fonction nulle de E_n puisque g est nulle.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}}$

7.

7.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L(e_0)(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} = 1$. Ainsi, $\boxed{L(e_0) = e_0}$

7.2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On va faire une intégration par parties, qui est licite car :

- les fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,
- la limite $\lim\limits_{t\to-\infty} t^{k+1}\mathrm{e}^{t}$ existe et vaut 0 par croissances comparées,
- les fonctions sont intégrables sur $]-\infty, c]$ pour tout c réel.

Ainsi, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
L(e_{k+1})(x) &= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left(\left[t^{k+1}\mathrm{e}^{t}\right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} (k+1)t^{k}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{x} - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^{k}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right) \\
&= e_{k+1}(x) - (k+1)L(e_k)(x).
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que : $\boxed{\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \ L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)}$

7.3. Pour montrer que L est un endomorphisme de E_n, il reste à montrer que $\forall\, f \in E_n$, $L(f) \in E_n$.

Or, comme on sait que L est linéaire et que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ est une base de E_n, il suffit de montrer que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $L(f_k) \in E_n$.

Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$.

- Initialisation : d'après la question **7.7.1.**, $L(e_0) = e_0 \in E_n$, donc la propriété est vraie pour $k = 0$.

- Hypothèse de récurrence : Supposons que pour un $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_k) \in E_n$.

  Montrons maintenant que $L(e_{k+1}) \in E_n$.

  D'après la question précédente, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$.

  Alors, en utilisant hypothèse de récurrence et le fait que E_n est un espace vectoriel, on obtient que $L(e_{k+1})$ est un élément de E_n.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ L(e_k) \in E_n}$

Ainsi, d'après la remarque faite au début de la question, $\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } E_n}$

8. D'après la question **6.**, L est injective.

On vient de démontrer que L est un endomorphisme de E_n qui est de dimension finie, et donc,

$$\boxed{L \text{ est un automorphisme de } E_n}$$

9. Recherche des sous-espaces propres de L.
Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. D'après la question **6.**, L est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de L.

9.2. Puisque f est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, la fonction f vérifie $L(f) = \lambda f$.

En utilisant la question **5.**, λf est solution de l'équation différentielle $y' + y = f$.

Autrement dit, f vérifie $\lambda f' + \lambda f = f$, ce qui revient à $\lambda f' + (\lambda - 1) f = 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (*)}$

9.3. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation différentielle se réécrit $y' + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) y = 0$

Donc :

• Si $\lambda = 1$, alors l'équation différentielle se réécrit : $y' = 0$, dont les solutions sont les fonctions constantes.

• Si $\lambda \neq 1$, alors les solutions sont les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{\left(-1+\frac{1}{\lambda}\right)x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

9.4. • Si $\lambda = 1$, alors les solutions sont constantes et sont donc polynomiales.

• Si $\lambda \neq 1$, les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{\left(-1+\frac{1}{\lambda}\right)x}$ ne sont polynomiales que si $K = 0$ car $-1 + \dfrac{1}{\lambda}$ ne s'annule pas.

Ainsi, $\boxed{\text{les seules solutions polynomiales de l'équation } (*) \text{ sont les fonctions constantes}}$

9.5. Soit λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

Alors f est polynomiale (dans E_n) et est solution de $(*)$.

Ainsi, d'après la question précédente, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $f \in \mathrm{Vect}(e_0)$.

Conclusion : **L'endomorphisme L n'a qu'une seule valeur propre, et le sous espace propre associé est de dimension** 1.

Comme E_n est de dimension $n+1 > 1$ (car $n \geqslant 2$), on en déduit que $\boxed{L \text{ n'est pas diagonalisable}}$

10. Soit $f \in E_n$ et $g = L(f)$.

On a vu à la question 5. que : $g = L(f) \iff g' + g = f \iff (D + \mathrm{Id})(g) = f$

Mais aussi, $g = L(f) \iff f = L^{-1}(g)$ puisque l'on sait que L est un automorphisme de ED_n.

On en déduit alors que $L^{-1} = D + \mathrm{Id}$.

11. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $L^{-1}(e_k) = (D+\mathrm{Id})(e_k) = ke_{k-1} + e_k$, et $L^{-1}(e_0) = e_0$.

Donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. La matrice M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Donc $\boxed{\mathbf{Sp}(L^{-1}) = \{1\}}$

Ensuite :

λ est valeur propre de L si et seulement s'il existe $f \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$ telle que $L(f) = \lambda f$, soit encore $\dfrac{1}{\lambda} f = L^{-1}(f)$.

Autrement dit λ est valeur propre de L ssi $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de L.

Conclusion : $\boxed{\mathbf{Sp}(L) = \{1\}}$

Exercice 3.

1. D'après les relations coefficients racines, les racines, on a, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation :

$$\begin{cases} r_1\, r_2 = -1 \ (1) \\ \text{ et} \\ r_1 + r_2 = 1 \ (2) \end{cases}$$

Comme le discriminant $\Delta = 5 > 0$, les deux racines sont réelles et de signe contraire d'après (1).

En utilisant les notations de l'énoncé, les deux racines s'écrivent donc, d'après (1) : γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.

De plus, $\gamma = 1 - \dfrac{-1}{\gamma} = 1 + \dfrac{1}{\gamma} > 1$

2. Soit (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

2.1. Soit n un entier strictement positif. Alors $a_n = b_{n-1}$, donc $b_{n+1} = a_n + b_n = b_{n-1} + b_n$.

2.2. • Pour la première, en prenant $n = 0$, on trouve $b_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right) \neq 0$, donc cette expression ne convient pas.

• Comme les racines de l'équation caractéristique associée à la suite (b_n) sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$, l'expression doit être une combinaison linéaire de γ^n et $\dfrac{(-1)^n}{\gamma^n}$. La seconde expression est une combinaison linéaire de $(-\gamma)^n$ et $\dfrac{1}{\gamma^n}$, ce qui ne convient pas.

Ainsi, $\boxed{\text{la troisième expression est l'expression correcte}}$

2.3. Par définition des suites (a_n) et (b_n), pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = b_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n \sqrt{5}}$.

De plus, $a_0 = b_1 - b_0 = 1$, et

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{-1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^{-1}\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}}$

2.4. On peut soit procéder par récurrence, ou bien utiliser les expressions trouvées précédemment :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n + b_n\gamma &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\
&= \gamma^n
\end{aligned}$$

en répétant le calcul de la question précédente.

3. En posant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie alors directement que $V_{n+1} = M\,V_n$.

4. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Or, ce polynôme a deux racines γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$ qui sont distinctes (une est strictement positive, l'autre strictement négative). Il est donc scindé à racines simples. La matrice M est diagonalisable. On aurait aussi pu dire que comme M est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.

Les valeurs propres de M sont γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.

De plus,

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ x + y = \gamma y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \gamma x \\ 0 = \gamma^2 x - \gamma x - x \end{cases} \iff y = \gamma x.$$

Donc $E_\gamma = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}\right)$.

De même on trouve $E_{-\frac{1}{\gamma}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

5. Pour prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation $M^n = a_n\,I_2 + b_n\,M$, on effectue un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel n.

- Initialisation : comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a bien $M^0 = a_0\,I_2 + b_0\,M$.
- Hypothèse de récurrence : supposons que pour $n \geqslant 0$, on a : $M^n = a_n\,I_2 + b_n\,M$.

  Alors

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M \cdot M^n \\
&= M\,(a_n\,I_2 + b_n\,M) \\
&= a_n\,M + b_n\,M^2 \\
&= a_n\,M + b_n\,(I_2 + M) \\
&= b_n\,I_2 + (a_n + b_n)\,M \\
&= a_{n+1}\,I_2 + b_{n+1}\,M
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On commence par donner une autre expression de C_n en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k\, I_2 + b_k\, M}{k\,!} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k\,!}\right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k\,!}\right) M \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\gamma^{k-1}}{k\,!} - \frac{(-\gamma^{-1})^{k-1}}{k\,!}\right) I_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\gamma^{k}}{k\,!} - \frac{(-\gamma^{-1})^{k}}{k\,!}\right) M \end{aligned}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{\gamma^k}{k\,!}$ converge vers e^{γ} et la série de terme général $\dfrac{(-\gamma^{-1})^k}{k\,!}$ converge vers $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Il en résulte que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$C = \left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}}\right) I_2 + \frac{\mathrm{e}^{\gamma} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{5}}\, M$$

7. Comme M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $M = P\,D\,P^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

Or, on montre par une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Cela nous permet d'écrire que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!} &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k\,!}\right) P^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k\,!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\gamma^{-1})^k}{k\,!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) P^{-1} \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$, on trouve

$$C = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{1}{\gamma}} \end{pmatrix} P^{-1} = P\,\Delta\,P^{-1}$$

et C **est bien semblable à la matrice** Δ.

Exercice 4.

1. D'après le cours, pour démontrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire, il faut prouver qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, positive et définie.

- Symétrie : soient $(P,Q)\in E^2$.

  On a $(P|Q)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}P(a_j)Q(a_j)=\sum_{j=0}^{n}Q(a_j)P(a_j)=(Q|P)$ et $(\,|\,)$ est symétrique.

- Bilinéarité : soient $(P,Q,R)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda P+Q|R)&=\sum_{j=0}^{n}(\lambda P+Q)(a_j)R(a_j)\\&=\lambda\sum_{j=0}^{n}P(a_j)R(a_j)+\sum_{j=0}^{n}Q(a_j)R(a_j)\\&=\lambda(P|R)+(Q|R)\end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité à gauche.

  Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $P\in E$, $(P|P)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}P(a_j)^2\geqslant 0$.

- Définition : soit $P\in E$ tel que $(P|P)=0$.

  Alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}P(a_j)^2=0$ donc pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $P(a_j)=0$.

  Il en résulte que P admet $n+1$ racines distinctes.

  Comme P est de degré au maximum n, il ne peut avoir au maximum que n racines et donc, c'est le polynôme nul.

Conclusion : $\boxed{(\,|\,)\text{ est un produit scalaire sur } E}$

2. Soit $P\in E$.

$$(P|P_0)=\sum_{j=0}^{n}P(a_j)P_0(a_j)=\sum_{j=0}^{n}P(a_j)$$

3. Pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X)=\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{X-a_k}{a_j-a_k}$.

3.1. Soit $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. Alors $L_j(a_i)=\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{a_i-a_k}{a_j-a_k}=0$ car $i\neq j$.

En fait, pour tout $i\neq j$, $X-a_i$ est en facteur dans L_j.

Ensuite, pour $i=j$, $L_j(a_j)=\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{a_j-a_k}{a_j-a_k}=1$.

3.2. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = L_i(a_i)L_j(a_i) + L_i(a_j)L_j(a_j) = 0.$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale.

3.3. Comme $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, elle est libre. Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n+1 = \dim(E)$, c'est une base de E.

De plus, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$(L_i|L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1.$$

et, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale de } E}$

3.4. Soit $P \in E$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, les composantes de P sont données par :

$$(P|L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_i(a_k) = P(a_i)$$

Ainsi, $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i}$

3.5. On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ car pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P_0(a_i) = 1$.

4.

4.1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0|P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.

Donc $\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

4.2. D'après le cours, on a $H = \mathrm{Vect}(P_0)^{\perp}$, donc $\boxed{H^{\perp} = \mathrm{Vect}(P_0)}$

Comme $\dim(H^{\perp}) = 1$, on a $\boxed{\dim(H) = \dim(E) - 1 = n}$

5.

5.1. D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace.

Comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \dfrac{P_0}{\|P_0\|} = \dfrac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de $H^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est donné par

$$(Q|R)R = \frac{1}{n+1}(Q|P_0)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$$

soit

$$\boxed{p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)}$$

5.2. Enfin, la distance de Q au sous-espace vectoriel H est égale à la norme du projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$:

$$\mathrm{d}(Q,H) = \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0\right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)\right|$$