

Épreuve de Mathématiques B PC 2018

Présentation de l'épreuve (durée 3h)

Le sujet porte sur l'étude des éventuelles solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, a étant un paramètre réel ; pour une certaine plage du paramètre a on établit une formule qui exprime la plus petite solution de l'équation en tant que série entière du paramètre a . Cette formule a une longue histoire, inspiré par des travaux de Lambert de 1758, elle est découverte par Euler en 1779, puis redécouverte/redémontrée successivement par Eisenstein en 1844 et Jensen en 1902.

Le problème est divisé en quatre parties, la première partie étudie l'existence de solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, la deuxième porte sur la résolution de l'équation fonctionnelle très classique $f(x + y) = f(x)f(y)$, la troisième partie étudie une suite de polynômes (polynômes d'Abel) et la dernière partie, plus longue, établit la formule mentionnée précédemment.

Commentaire général de l'épreuve

Le sujet n'étant pas trop long, toutes les parties ont été abordées. Le sujet fait appel à des connaissances diverses du programme d'analyse avec plus précisément des connaissances du programme de première année pour les trois premières parties et de deuxième année pour la dernière partie. Les candidats ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse notamment sur celles du programme de première année qui devraient être maîtrisées en fin de deuxième année.

Le jury a constaté dans un nombre important de copies un "papillonnage" alors que de très nombreuses questions nécessitent une imprégnation totale de l'énoncé. Dans la mesure où le sujet est relativement court, mieux vaut se limiter à traiter une moitié/deux tiers du sujet quitte à réserver un peu de temps en fin d'épreuve pour grappiller des points.

Les correcteurs ont déploré très peu de copies mal soignées et soulignent les efforts de présentation et de rédaction.

Analyse par parties

Partie 1

Une partie assez simple à condition de faire avec précision l'étude des fonctions auxiliaires ce qui a été fait par une moitié des candidats, trop peu comprennent qu'il fallait utiliser un théorème fondamental et précis (peu importe le nom qu'on lui donne si la référence est bien claire). La continuité sur un intervalle et la stricte monotonie étant des arguments essentiels et souvent très diffus.

La dernière question concernant les représentations graphiques de la fonction \ln et des droites d'équation $y = ax$ a été globalement bien faite mais a quand même posé des difficultés à une proportion non négligeable de candidats qui n'ont pas su représenter correctement les fonctions ou ont simplement passé la question.

Partie 2

Une deuxième partie très détaillée où les résultats attendus sont clairement énoncés. De la précision était attendue, tant pour effectuer les récurrences nécessaires que pour la bonne gestion des cas particuliers.

La stricte positivité de la fonction φ a été rarement bien traitée (question 3.a). A la question 3.b. beaucoup de candidats font une récurrence sur \mathbb{Z} . La fin n'est que rarement correcte, la continuité de la fonction et la convergence de la suite utilisée rarement bien dégagées.

Partie 3

Une troisième partie simple au début a été correctement traitée par les candidats, la dernière question plus difficile a été très rarement réussie.

Partie 4

Une quatrième partie qui utilisait plus nettement les notions de deuxième année, et qui révèle les capacités des candidats. L'équivalent demandé à la question 1.a. a été assez bien traité. Pour la question 1.b., la formule de Stirling est connue mais la convergence absolue de la série n'a pas été bien traitée, on se perd souvent sur l'usage des paramètres : série entière en a (avec un rayon de convergence) ou série de fonction en x ou simplement série numérique ? Le cas $a = \frac{1}{e}$ est en particulier rarement bien traité. De même, la question suivante où l'on doit étudier la continuité d'une série de fonctions est très rarement réussie.

Le produit de Cauchy est rarement bien cité et à la question 2.c. les candidats se précipitent vers le résultat demandé en omettant les arguments nécessaires. Le caractère \mathcal{C}^1 de la fonction F_a est là encore rarement correctement traité ; la suite a été assez peu abordée.

Dans l'ensemble les questions 1.b., 2.a. et 2.d. ont été décevantes, ce sont des questions tout à fait standard (convergence de série, continuité d'une série de fonction et caractère \mathcal{C}^1 d'une série de fonctions) auxquelles les étudiants sont préparés en deuxième année de cursus.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme notamment ceux de première année qui peuvent ne pas avoir été revus en deuxième année.
- ne pas "papillonner" et prendre le temps de s'imprégner du sujet surtout si celui-ci est de longueur raisonnable.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies dont les résultats ne sont pas soulignés, les copies comportant des fautes d'orthographe ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.