CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient a_1, ... , a_n, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

1. Montrer que l'application $T : P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathscr{E} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathscr{B}' = (L_1, ..., L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1 Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice M.

3.2 Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3.3 En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)\,X + P(2)\,X^2$.

4. On revient au cas général.

4.1 Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question **2.**)

4.2 Établir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4.3 Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^{n} m_{1j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0$.

4.4 Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, P \in E, \quad u(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(0)\, L_1(X) + P(1)\, L_2(X) + P(2)\, L_3(X)$$

5.1 Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

5.2 Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.

3. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)\, g(t) \, \mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $< \mid >$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 1

Soit h, élément de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

2. Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie **1.**

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. Démontrer que :

$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 \, [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right) \left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t\right) \quad (*)$$

4. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3.

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possible est noté Ω.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.

On considère alors une suite $(X_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que les variables aléatoires X_0, X_1, $\ldots$, X_k et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraîne l'existence de l'espérance de Y.
On pourra constater que $([T = j])_{j\in[\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 4.

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

1.1 Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.

1.2 Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que `f(a)f(b)` < 0 et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de `f` à une précision `eps` près.

2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

2.1 Montrer que f admet un point fixe (c'est à dire un réel c de $[0,1]$ tel que $f(c) = c$).

2.2 Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de `f` à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste.

1. On propose l'algorithme suivant

```
def rech_dicho(L,g,d,x):
    """L est une liste, telle que L[g:d+1] est triee"""
    if x>L[d]:
        return d+1
    else:
        a=g
        b=d
        while a!=b:
            c=(a+b)//2
            if x<=L[c]:
                b=c
            else:
                a=c+1
    return a
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1.1 On prend `L = [2,4,5,7,7,8,10]`. Que renvoient les instructions suivantes ?

```
>>>rech_dicho(L,1,5,6)
>>>rech_dicho(L,0,5,1)
```

On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.

1.2 Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.

1.3 Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O, et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L)`, `g`, `d`, `x`.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho`. Comparer avec le tri par insertion classique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IN CHOISY – 17 1161 – D'après documents fournis