

AVERTISSEMENT : Ceci n'est pas une correction *in extenso* du problème de capes. Il s'agit plutôt d'une lecture personnelle des questions, avec des indications, des idées de preuve, des mises en garde d'erreurs à éviter. Ce n'est surtout pas une correction modèle à reproduire... Pour signaler toute erreur, merci d'écrire à devgeolabo@gmail.com

Il s'agit de deux problèmes qui, de façon très étonnante, ont à peu près les mêmes thématiques : déterminants, interpolation, estimation de l'erreur... Les parties A,B,D du premier problème, A et B du second sont à travailler !

Premier problème

Partie A

- I. Deux choses à faire : vérifier que L_k vérifie les propriétés demandées (c'est trivial), et démontrer que c'est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie ces propriétés. On va utiliser le résultat suivant : si Q est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ admettant au moins n racines, alors Q est le polynôme nul. Soit donc P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ solution du problème, et posons $Q = L_k - P$. Alors Q s'annule en tous les a_i , $1 \leq i \neq k \leq n$, et Q s'annule aussi en a_k puisque $Q(a_k) = L_k(a_k) - P(a_k) = 0$. Q admet donc n racines !

II.1.

II.2. Il suffit de remarquer que $F(L_k) = e_k$.

II.3. On peut démontrer la surjectivité en utilisant des résultats abstraits d'algèbre linéaire. Par exemple, on sait que $\text{Im}(F)$ contient une famille génératrice, donc, puisque c'est un espace vectoriel, il contient l'espace vectoriel engendré par cette famille génératrice, donc \mathbb{R}^n tout entier. On peut aussi faire un raisonnement simple à la main (qui redémontre en quelque sorte cette propriété). Prenons $x \in \mathbb{R}^n$. Alors x s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. On pose alors $P = x_1 L_1 + \dots + x_n L_n$ et on vérifie facilement que $F(P) = x$.

La deuxième partie de la question est une question de cours d'algèbre linéaire. On sait que F est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension (attention à ne pas oublier cette dernière partie de la phrase). Puisque F est surjective, on en déduit que F est bijective (pour des applications linéaires entre espaces de même dimension finie, on a équivalence entre être injectif, être surjectif et être bijectif)

III.1. Il s'agit juste d'une reformulation de la bijectivité de F .

III.2. Notre deuxième rédaction de la question II.3. a déjà répondu à cette question, avec $x_1 = f(a_1)$. On a donc

$$P = f(a_1)L_1 + \dots + f(a_n)L_n.$$

Partie B

I.1. Ouvre ton cours!

I.2. C'est une question très classique qui demande une rédaction précise. On va prouver le résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Pour cela, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : "Pour tout fonction g qui est n -fois dérivable sur $[a, b]$ et qui s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$, alors $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$ ".

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée : c'est exactement le théorème de Rolle ! Soit un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour cela, on considère g une fonction $n+1$ -fois dérivable sur $[a, b]$, qui s'annule en au point $n+2$ points distincts. Notons $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2}$ ces points. D'après le théorème de Rolle appliqué à g entre a_i et a_{i+1} , pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, g' s'annule en au moins un point b_i de l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$. Puisque $b_i < a_{i+1} < b_{i+1}$, les points b_1, \dots, b_{n+1} sont distincts. Posons $h = g'$. La fonction h est donc une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ qui s'annule en au moins $n+1$ points distincts. D'après l'hypothèse de récurrence, $h^{(n)}$ s'annule en au moins un point. On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie puisque $g^{(n+1)} = h^{(n)}$. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n . Notez bien la rédaction de cette question et notamment la façon dont est posée $\mathcal{P}(n)$. On a besoin que le quantificateur "Pour tout fonction g " apparaisse à l'intérieur, car on applique $\mathcal{P}(n)$ non à g , mais à sa dérivée.

II.1. La fonction g_c s'annule en tous les a_i et en c .

II.2. Facile.

II.3. Si $Q(x) = a_n x^n + \dots$ est une fonction polynomiale de degré n , alors $Q^{(n)}(x) = n! a_n$ (fonction constante). On en déduit facilement que

$$g_c^{(n)} = f^{(n)} - n!(f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{c - a_k}.$$

III.1. $g_c^{(n)}$ s'annule en $\xi \in]a, b[$...

III.2. Si c est égal à un des a_k , tout est égal à 0, on peut prendre n'importe quel $\xi \in [a, b]$.

III.3. Il faut être un peu sérieux dans la rédaction si on veut justifier la présence de ces maximums... On a, pour tout $c \in [a, b]$, l'existence de $\xi \in [a, b]$ tel que

$$|f(c) - P(c)| \leq \frac{1}{n!} \times |f^{(n)}(\xi)| \times \prod_{k=1}^n |c - a_k|.$$

La fonction $f^{(n)}$ étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée et elle atteint ses bornes. On a donc

$$|f^{(n)}(\xi)| \leq \max_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)|$$

(remarquer l'argument permettant d'employer un maximum et non seulement une borne supérieure). D'autre part, la fonction $x \mapsto \prod_{k=1}^n |x - a_k|$ est elle aussi continue sur $[a, b]$. Pour les mêmes raisons, on a

$$\prod_{k=1}^n |c - a_k| \leq \max_{[a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

Ainsi, on a prouvé que, pour tout $c \in [a, b]$,

$$|f(c) - P(c)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{[a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

Mais, la fonction $c \mapsto |f(c) - P(c)|$ est continue sur $[a, b]$. Elle y atteint donc son maximum, et d'après l'égalité précédente,

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{[a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|.$$

Il s'agit ici d'une question où on peut avoir l'impression d'avoir bien réussi, mais où l'on a fait une mauvaise rédaction.

Partie C

I.1. Simple calcul, qu'on peut d'ailleurs effectuer avec xcas avec l'instruction suivante :

```
normal(lagrange([0,pi/2,pi],[sin(0),sin(pi/2),sin(pi)]));
```

On obtient alors

$$P(x) = \frac{4\pi x - 4x^2}{\pi^2}.$$

I.2. C'est exactement B.III.3. non ???

I.3. Il s'agit de trouver la borne supérieure de $x \mapsto x(x - \pi/2)(x - \pi)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Notons h cette fonction, qu'on étudie sur l'intervalle $[0, \pi]$ (remarquez qu'on pourrait l'étudier simplement sur $[0, \pi/2]$, pourquoi?). La fonction h est dérivable, sa dérivée est

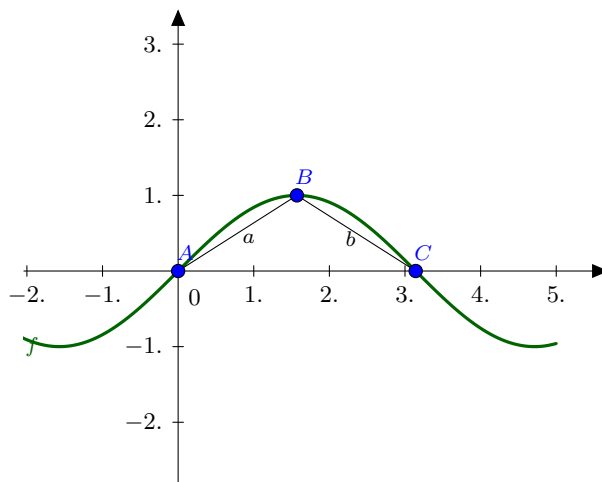
$$h'(x) = \frac{6x^2 - 6\pi x + \pi^2}{2}$$

donc les racines sont $x_1 = \frac{-\sqrt{3}\pi + 3\pi}{6}$ et $x_2 = \frac{+\sqrt{3}\pi + 3\pi}{6}$. Ces deux réels appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$ et h est donc croissante entre 0 et x_1 , décroissante entre x_1 et x_2 , croissante entre x_2 et π . Puisque $h(0) = h(\pi) = 0$, le maximum de $|h|$, sur l'intervalle $[0, \pi]$, est atteint en x_1 ou en x_2 (faites un tableau de variations!). On trouve que

$$|h(x_1)| = |h(x_2)| = \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{36}$$

ce qui donne le résultat demandé puisque $36 \times 6 = 216$.

II.1 Il faut d'abord comprendre que l'on n'est plus du tout dans une interpolation de type Lagrange, mais dans une interpolation par une fonction affine par morceaux, exactement comme pour la méthode des trapèzes de calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.



Le calcul de Q_1 et Q_2 ne devrait pas poser de problèmes. On a

$$Q_1(x) = P_0(x)$$

pour tout x dans $[0, \pi]$. Mais P_0 est le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 vérifiant $P_0(0) = 0$ et $P_0(\pi) = 0$. P_0 est donc le polynôme nul, et $Q_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Concernant Q_2 , on doit séparer le cas $x \in [0, \pi/2[$ et $x \in [\pi/2, \pi]$. Pour le premier intervalle, on cherche l'équation de la droite passant par les points $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$. Son équation est $y = \frac{2}{\pi}x$. On a donc $Q_2(x) = \frac{2}{\pi}x$ si $x \in [0, \pi/2[$. Pour le second intervalle, on cherche l'équation de la droite passant par les points $(\pi/2, 1)$ et $(\pi, 0)$. Son équation est

$$y - 1 = -\frac{2}{\pi}(x - \pi/2) \iff y = -\frac{2}{\pi}x + 2.$$

On a donc $Q_2(x) = -\frac{2}{\pi}x + 2$ si $x \in [\pi/2, \pi]$. Bien sûr, il FAUT vérifier que cela fonctionne aux extrémités...

- II.2. Une fonction affine par morceaux est continue sur son ensemble de définition si et seulement si elle est continue en ses points de raccord. Ici, pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$, on a

$$P_{k-1}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = P_k\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

C'est bien le cas !

- II.3. C'est comme à la question I.2. de cette partie, il suffit d'étudier une fonction dont on remarquera qu'elle atteint son maximum en $(k+1/2)\pi/n$ (c'est presque la fonction $x \mapsto x(1-x)$ qui apparaît lorsqu'on étudie des intervalles de confiance...).

- II.4. Il suffit de démontrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, on a

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

C'est un petit peu difficile, si on ne pense pas à appliquer le résultat de la question III.3. de la partie B, qui s'applique immédiatement ici avec $f = \sin$, $P = P_k$, $a = \frac{k\pi}{n}$ et $b = \frac{(k+1)\pi}{n}$ et " $n = 2$ " (ce n'est pas le même n que celui qui est introduit ici). La dérivée seconde de \sin étant $-\sin$, bornée par 1, le résultat se déduit immédiatement de la question A. III.3. et de la question précédente.

- III. Qu'entend-on par meilleure méthode d'approximation ? La première est meilleure pour la régularité de la fonction qui interpole, qui est de classe C^∞ quand la deuxième n'est que C^∞ par morceaux. La seconde est meilleure quand on augmente le nombre de points, car l'erreur commise tend vers 0. A nombre de points égal (3), il faut comparer $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$ et $\frac{\pi^2}{8 \times 2^2}$. La première méthode semble légèrement meilleure, mais toutefois ce que l'on obtient n'est qu'une majoration.... Peut-être que nos estimations sont mauvaises !

Partie D

- I. Lorsque $n = 2$, on a $\det(A) = a_2 - a_1$. Lorsque $n = 3$, on peut calculer le déterminant par la règle de Sarrus si on ne le veut pas sous forme factorisée. Sinon, on fait des opérations élémentaires. En retirant la première ligne à la deuxième et à la troisième ligne, on trouve :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première colonne et on trouve :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1) - (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2). \end{aligned}$$

- II.1. Prenons la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et la base canonique de \mathbb{R}^n . Puisque $F(X^k) = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, A est bien la matrice de F dans ces bases.
- II.2. Si les a_k sont deux à deux distincts, F est bijective donc sa matrice, dans n'importe quelles bases du départ et de l'arrivée, est inversible. Donc A est inversible.
- II.3. Si deux des a_k sont égaux, A admet deux lignes identiques. Son rang est donc inférieur ou égal à $n - 1$: elle ne peut pas être inversible !
- II.4. La matrice A est inversible si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.
- III.1. ??? C'est juste le développement de P ???
- III.2. D'après le choix des λ_j , le nombre que l'on obtient à la k -ième ligne est $P(a_k)$. Cela fait 0 si $k \neq n$.
- III.3. Ce sont les mêmes méthodes qu'à la question I. On ne change par la valeur d'un déterminant si, à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes. En utilisant le résultat de la question précédente, on a donc :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

Il suffit ensuite de développer par rapport à la dernière colonne pour trouver le résultat demandé. Remarquons que le coefficient devant $P(a_n)$ est $(-1)^{n+n} = (-1)^{2n} = 1$.

- III.4. Prouvons ce résultat par récurrence sur n . On fixe $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels et on note $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse suivante : "le déterminant de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est égal à $\prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k)$."

Le résultat est vrai si $n = 2$ (question II).

Soit $n \geq 3$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$ et prouvons le au rang n . On a alors, d'après la question précédente,

$$\det(A_n) = P(a_n) \det(A_{n-1}).$$

On utilise l'hypothèse de récurrence et la forme factorisée de P , et on trouve que $\det(A_n) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k)$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n)$.

Par le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier n .

III.5. A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.

Partie E

Cette partie a été vraisemblablement très peu abordée...

I.1. ???

I.2. La matrice du système est une matrice de Vandermonde avec $n = 3$. Elle est inversible si et seulement si tous les a_i sont distincts, c'est-à-dire si tous les A_i ont des abscisses différentes. Ici, si deux des A_i ont la même abscisse, le système n'est pas inversible. Mais attention ! Il faut un argument supplémentaire pour dire qu'il n'admet pas de solutions. Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

n'est pas inversible, mais il admet une infinité de solutions... Il faut donc être plus précis. Si $a_1 = a_2$ par exemple, les membres de gauche de la première et de la deuxième équation sont égaux. Les membres de droite ne le sont pas (on a supposé que A_1 et A_2 sont distincts, donc si $a_1 = a_2$, on doit avoir $b_1 \neq b_2$). Donc le système n'a pas de solutions.

I.3.a. La matrice du système est inversible.

I.3.b. Je suis à peu près sûr que personne n'a répondu à cette question ! Il suffit d'utiliser les formules de Cramer. En notant A_3 comme précédemment la matrice du système, et en notant D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

ces formules donnent immédiatement

$$\alpha = \frac{D}{\det A}.$$

I.3.c. Je donne juste des indications. On calcule D en retirant la première ligne à la deuxième et à la troisième, et on trouve que $\alpha = 0 \iff D = 0$ si et seulement si la condition (ii) a lieu. Cette dernière condition est équivalente à l'alignement de A_1, A_2 et A_3 car elle est équivalente au fait que les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ sont colinéaires (regarder la matrice par ligne...).

I.4. Résumé des questions précédentes (A_1 et A_2 ont la même abscisse si et seulement si (A_1A_2) est parallèle à D).

II.1. Jamais fait par les candidats. En utilisant son équation réduite, on observe qu'une parabole est toujours parallèle à un certain axe et on utilise la question précédente.

II.2. Prenons une droite D qui n'est parallèle ni à (A_1A_2) , ni à (A_1A_3) , ni à (A_2A_3) . Alors il existe une parabole parallèle à D qui passe par les trois points. Il faut encore justifier que deux paraboles parallèles à des axes différents sont distinctes...

Deuxième problème

Partie A

- I.1. Laissé au lecteur ! Cela dit, on va avoir besoin dans la suite de $D_1 = 2$ et de $D_2 = 3$.
- I.2. Effectuons un développement par rapport à la première colonne. Le premier déterminant qui apparaît est D_{n-1} , le second est plus étrange et on a donc :

$$D_n = 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant, effectuons un développement par rapport à la première ligne. Le déterminant restant est exactement D_{n-2} , ce qui donne bien le résultat demandé !

- I.3. Cette question prouve qu'il faut très bien savoir son cours ! (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Introduisons l'équation caractéristique $r^2 = 2r - 1 \iff (r - 1)^2 = 0$. Elle admet donc 1 comme racine double, ce qui permet de conclure qu'il existe deux constantes λ et μ telles que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$D_n = \lambda + n\mu.$$

Appliquons ceci pour $n = 1$ et $n = 2$. On trouve $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda + 2\mu = 3$, ce qui donne finalement $\mu = 1$ et $\lambda = -1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = 1 + n.$$

Et comme on a aussi calculé D_3 , on peut vérifier que les valeurs coïncident. Petit lien vers un résumé de cours sur l'étude des suites récurrentes linéaires.

- I.4. Le déterminant de A_n n'est pas nul (il est strictement positif), donc la matrice A_n est inversible.
- II.1. Il suffit d'écrire que $U = A_n^{-1}B \iff A_n U = B$. Les autres questions de cette partie sont un peu techniques, et ne font pas vraiment intervenir de connaissances. Je ne conseille pas de s'y attarder.
- II.2. Posons $v_i = \frac{i(n+1-i)}{2}$, pour $i = 0, \dots, n+1$. D'après la question précédente (qui est un si et seulement si), il suffit de vérifier que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$2v_i - v_{i-1} - v_{i+1} = 1$$

pour conclure que $v_i = u_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$. Cette vérification est triviale... Pour prouver le "en déduire", on étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{x(n+1-x)}{2}$ sur l'intervalle $[0, n+1]$ et on vérifie qu'elle atteint son maximum en $(n+1)/2$ où elle vaut précisément $\frac{(n+1)^2}{8}$. On a donc

$$\max(u_1, \dots, u_n) \leq \max_{[0, n+1]} f \leq \frac{(n+1)^2}{8}.$$

- II.3.a. Supposons que $j \neq 1$ et $j \neq n$. On sait que

$$2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} = b_j \geq 0.$$

Maintenant, puisque $j < n$ et que j est le plus grand des indices par $\{1, \dots, n\}$ pour lequel le minimum est atteint, on a forcément $u_{j+1} > u_j$. L'inégalité précédente donne alors :

$$2u_j - u_{j-1} \geq u_{j+1} > u_j \implies u_j > u_{j-1}.$$

Mais c'est absurde, car $j - 1 \in \{1, \dots, n\}$ (on a supposé $j > 1$), et u_j est censé réaliser le minimum de u_1, \dots, u_n .

II.3.b. Supposons par exemple que $j = 1$. Alors $u_2 \geq u_1$ et on sait que

$$2u_1 - u_2 = 2u_1 - u_0 - u_2 \geq 0.$$

On en déduit

$$2u_1 \geq u_2 \geq u_1 \implies u_1 \geq 0$$

et donc tous les u_i sont positifs ou nuls. Si $j = n$, le résultat est identique, mais en partant de la relation

$$2u_n - u_{n+1} - u_{n-1} \geq 0.$$

III.4.a. Posons $B' = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - B$ et $B'' = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B$ et notons b'_i les composantes de B' , b''_i les composantes de B'' . Alors, par définition de β , on a $b'_i \geq 0$ pour tout i et $b''_i \geq 0$ pour tout i . Le résultat se déduit alors exactement de la question précédente.

III.4.b. Notons $z_i = (v_i + w_i)/2\beta$, Z le vecteur colonne de coordonnées les z_i . Alors, par linéarité, Z est solution de

$$Z = A_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question II.2., on a $z_i \leq \frac{(n+1)^2}{8}$ d'où on déduit facilement le résultat demandé.

III.4.c. Il est clair (toujours par linéarité) qu'on a $u_i = \frac{w_i - v_i}{2}$ et d'autre part :

$$\frac{v_i + w_i}{2} - \frac{w_i - v_i}{2} = v_i \geq 0.$$

Partie B

Partie nettement plus classique, qu'il faut savoir faire !

I.1. Question très intéressante ! On peut dire qu'il s'agit d'un corollaire du théorème fondamental du calcul intégral. Ce corollaire dit que, si g est une fonction continue sur $[a, b]$ et si G est une primitive de g , alors

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(t) dt.$$

I.2. Intégrons par parties en posant $u(t) = -(b - t)$, de sorte que $u'(t) = 1$, $v(t) = f(t)$, de sorte que $v'(t) = f'(t)$. On en déduit que

$$\int_a^b f'(t) \times 1 dt = [-(b - t)f'(t)]_a^b + \int_a^b (b - t)f''(t) dt = (b - a)f'(a) + \int_a^b (b - t)f''(t) dt.$$

- I.3. On peut supposer $n \geq 2$. La voie est toute tracée. On va prouver par récurrence récurrence finie sur $k \leq n$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) : f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + \int_a^b \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} dt.$$

Les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies d'après la question précédente. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour un certain $k \leq n-1$ et prouvons $\mathcal{P}(k+1)$. On réalise une intégration par parties dans l'intégrale exactement de la même façon qu'à la question précédente, et on trouve

$$\int_a^b \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (b-t)^{k-1} dt = \left[-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \times \frac{(b-t)^k}{k} \right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k-1)!} \times \frac{(b-t)^k}{k} dt.$$

Si on réarrange un petit peu tout, on trouve le résultat voulu.

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, ce qui est le résultat voulu.

- II.1. La fonction $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est donc bornée et atteint ses bornes.
- II.2. C'est facile... On a successivement :

$$\begin{aligned} \left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right| &\leq \left| \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} \right| dt \\ &\leq \int_a^b M_n \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &\leq M_n \frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Savez-vous justifier très précisément chacune des inégalités précédentes ?

Partie C

Cette partie est assez difficile, et située en fin d'épreuve, sans doute très rarement abordée par les candidats. Je vais juste donner des indications de correction. Cela dit, la première question est très intéressante...

- I. On commence par remarquer que, si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[0, 1]$, alors $u'' = v''$ si et seulement s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [0, 1]$, $u''(x) = v''(x) + \lambda x + \mu$. Sauriez-vous prouver cela ??? (conseil : si on pose $h = u'$ et $k = v'$, alors $h' = k'$ et désormais c'est un théorème du cours...).

Considérons maintenant G une fonction définie sur $[0, 1]$ telle que $G'' = g$ sur $[0, 1]$. Alors f est solution du problème si et seulement s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = G(x) + \lambda x + \mu$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $f(0) = a$, $f(1) = b$. Ce dernier système est équivalent à

$$\begin{cases} G(0) + \mu = a \\ G(1) + \lambda + \mu = b \end{cases}$$

Il admet une unique solution, $\mu = a - G(0)$ et $\lambda = b - \mu - G(1) = b - a + G(0) - G(1)$. Ainsi, f est solution si et seulement si, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = G(x) + (b - a + G(0) - G(1))x + a - G(0).$$

Ceci définit bien une fonction de classe \mathcal{C}^4 , et on a donc prouvé qu'il existait une unique solution à ce problème.

- II. C'est un peu technique. On doit appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange deux fois à f à l'ordre 4, une fois entre x et $x + h$, une fois entre x et $x - h$. On déduit alors le résultat de la dernière question de la partie B et de l'inégalité triangulaire, en écrivant quelque chose du type

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - h^2 f''(x) &= \\ \left(f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) \right) &+ \\ \left(f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) \right). & \end{aligned}$$

Cela dit, l'énoncé a oublié quelque chose ici. Il faut diviser par h^2 , et ce n'est possible que si h est non-nul, ce qui n'est nul part précisé.

- III.1. On écrit que $B = A_n U$, ce qui avec la relation sur les u_i donne $b_i = -h^2 g(x_i)$ pour $2 \leq i \leq n-1$. Il y a un problème au bord, par exemple

$$b_1 = 2u_1 - u_2 = (2u_1 - u_2 - u_0) + u_0 = -h^2 g(x_1) + a.$$

III.2. Question II.

III.3. A.4.c.

III.4. $h^4/(n+1)^2$ tend vers 0...