CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **CAPESA**

CONCOURS D'ACCES à la 2ème catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés

SESSION 2015

Concours : **EXTERNE**
Section : **MATHEMATIQUES**

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Culture disciplinaire

(Coefficient 2 - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet est constitué d'un problème et comporte six pages.

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une machine à sous électronique, dont voici le principe.
n désigne un entier naturel non nul.
Quand un joueur actionne la machine, celle-ci génère de façon aléatoire un tirage constitué par un affichage des entiers naturels de 1 à n disposés dans un certain ordre sur un écran.
On compte alors le nombre d'entiers se trouvant « à la bonne place », c'est-à-dire les entiers i tels que i occupe le i-ème rang.
Le gain du joueur est fonction du nombre de tels entiers, selon un modèle qui sera précisé dans la suite.

Dans les parties A, B et C, on établit certains résultats préliminaires.
Dans la partie D, on modélise, puis on étudie, le jeu proprement dit.

Rappels et notations

On rappelle que $0! = 1$ et que pour tous les entiers naturels k et n, les coefficients binomiaux sont définis par :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{si } k \leqslant n, \\ \binom{n}{k} &= 0 && \text{si } k > n. \end{aligned}$$

On pourra utiliser que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a, b]$.
Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{x\in[a,b]}{Sup} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Partie A : quelques propriétés des coefficients binomiaux

Dans cette partie, k et n désignent deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

1. **Propriété de symétrie**
   Justifier que $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. **Règle du triangle de Pascal**
   On suppose de plus k et n distincts et non nuls, montrer que $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
   Rappeler la construction du triangle dit de Pascal, en prenant appui sur cette relation.
3. **Binôme de Newton**
   Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.
   Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton, donnant le développement du produit $(a + b)^n$.
4. **Applications de ces propriétés à l'étude d'une suite**
   On pose $A_n = \left\{ \displaystyle\binom{n}{k} \ ; k \leq n \right\}$.

a) Montrer que pour k strictement inférieur à n, on a :

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}(n-2k-1).$$

b) Après avoir expliqué pourquoi A_n admet un plus grand élément, qu'on notera M_n, déduire de la question précédente que celui-ci est atteint lorsque k est égal à la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.

c) Justifier l'inégalité : $2^n \leqslant (n+1)M_n$. En déduire la limite de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B : étude d'une série alternée

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, strictement décroissante et convergeant vers 0.
Dans cette partie, on s'intéresse à la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Que peut-on en conclure pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On note $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$. Prouver que $\left|S_n - \ell\right| \leqslant a_{n+1}$.

3. *Application* : on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

a) Justifier que la série de terme général u_n est convergente.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - \frac{1}{e}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange avec une fonction bien choisie.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Partie C : étude d'une matrice triangulaire

Dans cette partie, p désigne un entier naturel non nul.

Soit T_p la matrice carrée d'ordre $(p+1)$, dont les coefficients a_{ij} sont définis par $a_{ij} = \dbinom{i-1}{j-1}$.

Rappels
On dit que le réel λ est une valeur propre de T_p, s'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $T_pX = \lambda X$.
X est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs propres est appelé sous-espace propre associé à λ.

1. Justifier que T_p est une matrice triangulaire inversible.

2. Déterminer la (ou les) valeur(s) propre(s) de la matrice T_p, ainsi que leur sous-espace propre associé.
La matrice T_p est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

La suite de cette partie a pour objet de déterminer les coefficients de la matrice inverse de T_p.
On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à p.

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ définie, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_p[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_p[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

a) Montrer que φ est une application linéaire.

b) Justifier que φ est une bijection et donner l'application réciproque.

c) Démontrer que la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ est la matrice transposée de T_p.

d) Déduire des deux questions précédentes que T_p^{-1} est une matrice carrée d'ordre $(p+1)$ dont le coefficient a_{ij} est égal à $\quad (-1)^{i-j} \times \binom{i-1}{j-1}$.

4. On considère le système suivant, de $(p+1)$ équations à $(p+1)$ inconnues $(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$:

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lllllllllll} \binom{0}{0}x_0 & & & & & & & & & = & 0! \\ \binom{1}{0}x_0 & + & \binom{1}{1}x_1 & & & & & & & = & 1! \\ \binom{2}{0}x_0 & + & \binom{2}{1}x_1 & + & \binom{2}{2}x_2 & & & & & = & 2! \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \binom{i}{0}x_0 & + & \binom{i}{1}x_1 & + & \ldots & + & \binom{i}{i}x_i & & & = & i! \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ \binom{p}{0}x_0 & + & \binom{p}{1}x_1 & + & \ldots & + & \binom{p}{i}x_i & + \ldots + & \binom{p}{p}x_p & = & p! \end{array} \right.$$

À l'aide des résultats précédents, justifier que le système $(\mathscr{S})$ admet un unique vecteur-solution $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ et que pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant p$, on a $y_i = i! \displaystyle\sum_{m=0}^{i} \frac{(-1)^m}{m!}$.

Partie D : étude des permutations laissant k éléments invariants

Dans cette partie, on revient à l'étude du jeu de machine à sous, décrit en préambule.
Les tirages de la machine sont représentés par les listes ordonnées des n entiers compris entre 1 et n.
Soit k un entier naturel, $0 \leqslant k \leqslant n$. On désigne par $I(k,n)$ le nombre de tirages possibles contenant k entiers « à la bonne place », c'est-à dire le nombre de listes contenant k entiers i tels que i occupe la i-ème place.
Par convention, on pose $I(0,0) = 1$.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'entiers « à la bonne place » dans un tirage donné.

1. **Étude du cas particulier** $n = 2$
   Déterminer la loi de probabilité de X_2, ainsi que son espérance et sa variance.

2. **Étude du cas particulier** $n = 3$
   Justifier que la loi de probabilité de X_3 est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X_3 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

   En déduire l'espérance et la variance de X_3.

   Dans la suite, on revient au cas général d'une liste ordonnée de n éléments distincts, où $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra utiliser les résultats des parties précédentes.

3. **Propriétés et calcul de** $I(k,n)$

   a) Justifier la relation $I(k,n) = \binom{n}{k} I(0, n-k)$.

   b) En déduire la relation
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I(0,k) = n!$$

   c) Justifier que $\big(I(0,0),\ I(0,1),\ I(0,2),\ ...,\ I(0,n)\big)$ est solution du système $(\mathscr{S})$ de la question 4 de la partie C.

   d) Etablir que pour $0 \leqslant j \leqslant n$,
$$I(0,j) = j! \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m}{m!}.$$
   En déduire une expression de $I(k,n)$ pour tout entier naturel k entre 0 et n.

4. **Étude de la loi de probabilité de** X_n

   a) Montrer que, pour $k \in \{0,1,..,n\}$,
$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

b) *Application au cas $n = 5$*
Déterminer le tableau résumant la loi de probabilité de la variable aléatoire X_5.

c) *Espérance de X_n dans le cas général*
Après avoir vérifié que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\quad kP(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)$, démontrer que l'espérance de X_n est égale à 1.

d) *Variance de X_n dans le cas général*
Justifier que la variance de X_n vérifie la relation :

$$V(X_n) = E\big(X_n(X_n - 1)\big) + E(X_n) \times \big(1 - E(X_n)\big)$$

En déduire que $V(X_n) = E\big(X_{n-1}\big)$, puis donner la valeur de $V(X_n)$.

5. Comportement asymptotique de X_n
Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n.

a) Quelle est la limite de $P(X_n = k)$ quand n tend vers $+\infty$?
Quelle est la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité que la machine affiche au moins un entier « à la bonne place » ?

b) Justifier que, lorsque n prend de grandes valeurs, $P(X_n = k)$ peut être approchée par $P(X = k)$, où X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.

c) On pose $p_k = \dfrac{e^{-1}}{k!}$. Justifier que :

$$\big|P(X_n = k) - p_k\big| \leqslant \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)!}$$

d) *Cas où n est impair*

Justifier que $\big|P(X_n = k) - p_k\big| \leqslant \left(\dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}\right)^2$

6. Espérance du gain du joueur
Un joueur désirant actionner la machine à sous doit miser une somme Δ_n (en centimes d'euros) dépendant du choix du nombre d'entiers n. On suppose $n \geqslant 2$.
Lorsque la machine affiche exactement k entiers « à la bonne place », la somme délivrée par la machine au joueur est fixée à $c_k = \dfrac{k!}{\beta_n}$ (en centimes d'euros) où β_n est un réel strictement positif fixé par le gérant de la machine à sous.

Soit G_n la variable aléatoire égale au gain du joueur lors d'une partie.

a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k P(X_n = k) \leqslant \frac{1}{\beta_n}\left(\sum_{k=0}^{n} k! p_k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\right)$.

b) En déduire que $E(G_n) \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}\left(\dfrac{n+1}{e} + e - 1\right) - \Delta_n$

c) Déterminer une condition sur la mise Δ_n, dépendant de β_n, pour que le jeu soit défavorable au joueur.