

## 2 Rapport sur les épreuves écrites

### 2.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable sur le site du jury, à l'adresse

<https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/23-ep1.pdf>.

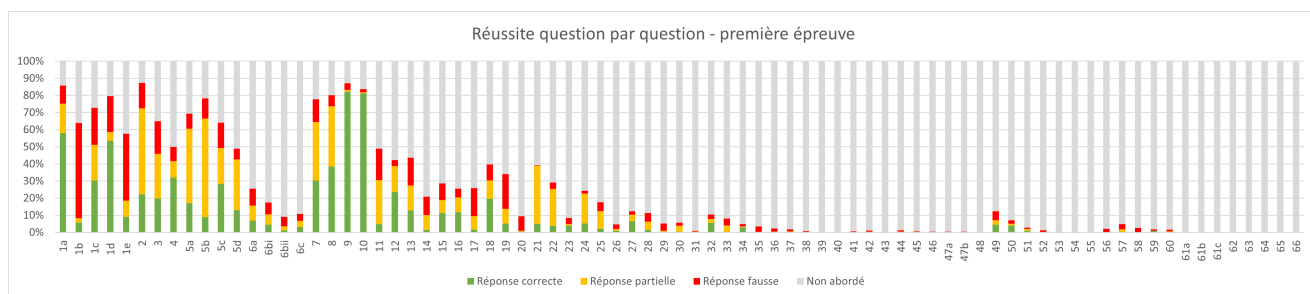
Des éléments de correction sont également téléchargeables sur ce site, à l'adresse.

[https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/ep2\\_23\\_v21\\_corrige.pdf](https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/ep2_23_v21_corrige.pdf).

Ces éléments de correction ne prétendent aucunement être exhaustifs.

#### 2.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions. Pour chacune d'elle, la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge correspond aux réponses erronées.



#### 2.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

En plus d'un Vrai-Faux et de deux exercices permettant de retrouver deux résultats classiques d'algèbre, le sujet comprenait un problème introduisant les nombres  $p$ -adiques. Les parties I et II étaient consacrées aux définitions et premières propriétés de notions. La valuation et la distance  $p$ -adiques apparaissaient dans la partie I et la partie II proposait une définition arithmétique de l'ensemble des entiers  $p$ -adiques, de sa structure d'anneau pour arriver à l'ensemble  $\mathbb{Q}_p$ . Les parties 3 et 4 proposaient deux applications de ces notions :

- le théorème de Skolem-Mahler-Lech sur l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $u_n = 0$  pour  $u$  une suite récurrente linéaire.
- La cyclicité de  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$  lorsque  $p$  est un nombre premier impair, en utilisant l'exponentielle  $p$ -adique.

Voici quelques exemples de rédactions incorrectes ou maladroites régulièrement rencontrées.

- On rencontre beaucoup d'objets non définis.
- L'utilisation des quantificateurs restent mal maîtrisés. On constate un manque de rigueur à ce propos dans un certain nombre de copies.
- Le symbole d'équivalence est trop souvent utilisé à la place de « donc », ce qui pose de gros problèmes aux correcteurs : doit-on comprendre (et noter) ce qui est écrit ou ce que le candidat a sans doute voulu dire ?
- Il faut éviter d'affirmer un résultat avant de l'avoir établi (ou alors faire précéder de « montrons que ». En particulier, pour démontrer une implication, les hypothèses doivent être clairement écrites (ce qui ne veut pas dire qu'il faille recopier l'énoncé).
- Chaque réponse doit comporter une conclusion, plus particulièrement dans les Vrai-Faux.
- La décomposition en facteurs premiers devrait être bien écrite en précisant que les  $p_i$  sont premiers et deux-à-deux distincts et que les puissances sont des entiers naturels non nuls.

Passons maintenant en revue certaines questions du sujet.

### *Vrai-Faux*

Dans les Vrai-Faux, la notion de contre-exemple n'est pas nécessairement bien comprise. Le jury ne se contente pas d'une réponse du style « pas forcément ».

1. (c) L'enchaînement des questions devait inviter à prendre du recul. En effet, si l'affirmation de la question 1. (b) était vraie, celle de la 1. (c) l'était également automatiquement.

1. (e) Des tentatives de contre-exemples ont parfois été faites en considérant des objets qui ne sont pas des corps :  $\mathbb{Z}$ ,  $GL_2(\mathbb{Z})$ , ... ou des applications qui ne sont pas correctement définies, par exemple l'application qui à une classe modulo 2 associe la classe d'un représentant modulo 3. Plusieurs candidats considèrent que  $\mu(x - x') = 0$  est équivalent à  $x - x' = 0$  car  $\mu$  est un morphisme. D'autres pensent que le morphisme est ici un contre-exemple alors que ce n'est pas un morphisme de corps.

### *Exercice 1*

2. Dans ce genre de questions proches du cours, le jury attend une rédaction très précise. Il est important d'écrire rigoureusement définition de famille liée. On a pu voir des

$$(x_i)_i \text{ liée} \iff \sum \lambda_i x_i = 0 \implies \exists i, \lambda_i \neq 0$$

qui montre une mauvaise compréhension de la notion. De plus, même si pour la famille liée, il existe des coefficients non tous nuls tels que la combinaison linéaire soit nulle, quand  $x_{k+1}$  est combinaison linéaire des  $x_i$ , les coefficients intervenant dans cette combinaison linéaire peuvent être nuls. Par ailleurs, les candidats doivent être attentifs à bien démontrer les deux implications dans cette question en écrivant pour chaque implication l'hypothèse.

3. La rédaction de cette première récurrence devait être exemplaire : récurrence sur  $k$  ou sur  $n$ ? Hypothèse de récurrence pour quel  $k$ ? Il était nécessaire de préciser que le sous-espace  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$  est de cardinal  $p^k$  grâce à la liberté de la famille  $(x_1, \dots, x_k)$ .

4. La réponse a souvent été donnée sans explication, ce qui n'est évidemment pas suffisant.

### *Exercice 2*

5. (a) Pour beaucoup de candidats, rechercher les entiers premiers avec  $p^i$  était confondu avec rechercher ses diviseurs.

5. (b) Cette question a parfois été très bien rédigée, avec des arguments clairs et convaincants. Par contre, certains candidats, ne maîtrisant pas nécessairement les notions, ont cru bon de mentionner que  $m_1$  et  $m_2$  sont premiers entre eux pour montrer la bonne définition de  $P$ , de dire que le théorème chinois donne la bijectivité, de mentionner l'égalité des cardinaux des ensembles sans la prouver pour passer de l'injectivité à la surjectivité, voire de mentionner la dimension des ensembles. Tous ces arguments hors sujet attirent la méfiance du correcteur sur toutes les autres questions du sujet.

5. (c) Une bonne partie de candidats ont compris le lien avec la question précédente.

5. (d) Dans cette question, il était nécessaire de généraliser la précédente avant de pouvoir l'utiliser.

## Partie I

7. Des candidats se sont souvent limité à  $n \in \mathbb{N}^*$  ou ont justifié en mentionnant simplement « par la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers ».

11. Les candidats sont invités à prendre du recul sur ce qu'ils démontrent. Certains ont prétendu démontrer que  $v_p(r - s) \geq v_p(r)$  et  $v_p(r - s) \geq v_p(s)$  et donc que  $v_p(r - s) \geq \max(v_p(r), v_p(s))$ , ce qui est un résultat plus fort que ce que demandait l'énoncé. Ceci invite normalement à s'interroger sur la véracité des arguments que l'on a proposé dans la démonstration.

12. L'énoncé demandait explicitement de préciser les règles de calcul avec l'infini, ce qui n'a pas toujours été fait. Le cas  $r = s$  (non nul) a souvent été oublié pour l'inégalité.

15. Beaucoup de candidats ont compris le lien avec  $v_5$  et  $v_2$  mais on a aussi vu le calcul de  $v_{100}(100!)$  ou de  $v_{10}(100!)$ .

17. On peut remarquer que cette question pouvait être résolue en s'inspirant de l'addition posée avec retenue en base 2.

22. Vérifier que  $d_p$  est une distance n'était pas une question très difficile lorsqu'on connaissait la définition d'une distance.

## Partie II

28. Rappelons que  $\theta(7)$  et  $\theta(-7)$  sont des suites, ce qui n'a pas été le cas dans toutes les copies.

## Partie III

49. Il était clairement écrit que la partie III pouvait être traitées en admettant certains résultats précédent. Cette opportunité n'a pas été saisie par énormément de candidats. C'est d'autant plus regrettable que le début de cette partie était constitué de questions assez classiques d'algèbre linéaire autour des suites récurrentes.

## 2.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable sur le site du jury, à l'adresse

<https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/23-ep2.pdf>.

Des éléments de correction sont également téléchargeables sur ce site, à l'adresse.

[https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/ep2\\_23\\_v21\\_corrige.pdf](https://interne.agreg.org/data/uploads/rapports/ep2_23_v21_corrige.pdf).

Ces éléments de correction ne prétendent aucunement être exhaustifs.

### 2.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions. Pour chacune d'elle, la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge