## 2.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep2/22-ep2.pdf

### 2.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions.

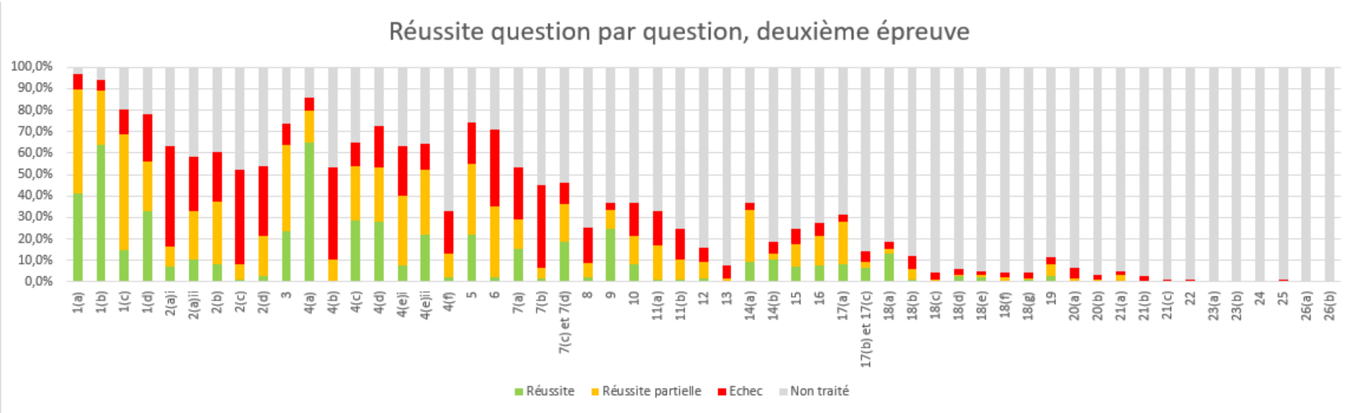


FIGURE 2.2 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse erronée.

### 2.2.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Le sujet de la seconde épreuve écrite portait sur la notion d'estimateur. La première partie consistait en quelques exercices, dont un « vrai ou faux » et une question de cours, portant sur des résultats classiques sur les séries entières. La notion de famille sommable était introduite dans la deuxième partie dans le but de démontrer le théorème du transfert. La notion d'estimateur était introduite et étudiée dans la partie suivante et l'inégalité de Cramer-Rao faisait l'objet de la dernière partie du sujet.

Passons en revue certaines questions du sujet.
*Première partie.*

**1a.** La rédaction n'est pas toujours soignée. On trouve des confusions entre suite et série, entre série et limite. Certains manipulent la limite ou le reste avant d'avoir prouvé l'existence.

**1b.** Question en général bien réussie même si dans certaines copies, on se contente de dire qu'on peut trouver des contre-exemples sans les expliciter.

**1c.** Le but de cette question était de démontrer partiellement le critère de d'Alembert et justifier la réponse en se contenter d'énoncer ce critère n'était pas suffisant.

**1d.** Question bien traitée dans de nombreuses copies. Il s'agissait bien de trouver un exemple de suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction non continue : se contenter d'écrire que la convergence de la suite doit être uniforme pour préserver la continuité de la limite n'était pas suffisant et constituait une erreur de logique.

Dans la question 2, certains candidats n'ont pas compris que « question de cours » signifiait que l'on demandait les démonstrations et non l'utilisation des résultats.

**2ai.** Trop souvent, les candidats confondent borne supérieure et maximum : le rayon de convergence n'est pas nécessairement dans l'ensemble. Certains candidats se contentent de citer le lemme d'Abel.

**2aii.** Bien que plus directe que la précédente, cette question n'a pas toujours été bien traitée. Certains montrent que la série ne converge pas absolument, ce qui ne permet pas de conclure. D'autres affirment que puisque le terme général n'est pas borné, il tend vers l'infini.

**2b.** Question assez bien traitée dans l'ensemble. Certains évoquent la dérivabilité comme régularité de $S$. On rencontre de nombreuses confusions des liens entre la convergence absolue et la convergence uniforme.

**2c.** Question peu traitée. Certains tentent de passer par une sorte de réciproque du critère de d'Alembert. D'autres utilisent ce critère, qui est inapplicable ici, quand bien même $u_k$ est non nul pour tout $k$.

**2d.** Cette question consistait à appliquer soigneusement les questions précédentes, ce qui n'a pratiquement jamais été fait.

**3.** Question particulièrement bien réussie. On peut regretter quelques erreurs de calculs dans de rares cas et le fait de ne pas vérifier les hypothèses du théorème de d'Alembert.

**4b.** Question difficile. Les candidats qui se sont lancés dans une récurrence n'ont pas abouti.

**4c.** De nombreux candidats savent mener une récurrence forte rigoureusement. D'autres révèlent une mauvaise maîtrise des hypothèses de récurrence avec des confusions entre les différents indices en jeu.

**4d.** Pour éviter tout problème, il convient de majorer les quantités avec les valeurs absolues. Beaucoup de candidats se sont contentés d'une majoration sans valeur absolue, ce qui est insuffisant.

**4e.** La résolution de l'équation différentielle n'est pas toujours satisfaisante. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène et du premier ordre dont on connaît les solutions. Il n'était pas demandé de redémontrer la forme des solutions de ce type d'équation. Par ailleurs le passage au logarithme sans se méfier du signe de $f$ est douteux. La résolution rigoureuse de ces équations a déjà été signalée dans plusieurs rapports, on peut s'étonner que malgré son aspect élémentaire et malgré ce qui est écrit dans les précédents rapports elle soit malmenée par nombre de candidats. Plusieurs candidats énoncent l'expression générale des solutions sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+c}$, ce qui interdirait l'équation d'avoir la solution nulle ou des solutions qui prennent des valeurs négatives malgré le théorème d'existence et d'unicité.

*Deuxième partie.*

**5.** Cette question abordable doit être rédigée méthodiquement. Ceux qui commencer à fixer un sous-ensemble fini $J$ de $I$ s'en sortent en général correctement. Les autres ont du mal à justifier le passage à la borne supérieure. La plupart des candidats n'ont pas justifié l'existence de cette borne supérieure (ce qui est d'ailleurs un problème récurrent dans les questions suivantes).

**6.** Question plus difficile, correctement résolue dans de rares copies. La démonstration de la sommabilité est souvent traitée correctement, mais l'égalité des sommes est rarement correctement démontrée.

**7c et 7d.** Nombreux sont ceux qui ont vu ici une application directe de la question précédente et du cours. Il convient de bien rappeler que les termes sont positifs pour affirmer la croissance des sommes partielles.

**11a.** La sommabilité a souvent été bien donnée. Attention, la partie positive de $u + v$ n'est pas la somme des parties positives de $u$ et de $v$.

**11b.** La sommabilité a souvent été bien donnée. Dans de rares cas, la suite de la question est correctement bien menée.

*Troisième partie.*

**14a.** Question bien traitée pour ceux qui l'ont abordée. Peu de candidats évoquent la convergence absolue (seulement la convergence) pour l'existence des moments d'ordre $r$.

**15.** Même si la question est bien résolue dans l'ensemble, l'univers-image de la somme n'est presque jamais précisé. Certains se contentent de calculer l'espérance et la variance de la somme pour conclure, comme s'ils caractérisaient la loi. L'indépendance n'est pas toujours précisée pour avancer dans les calculs.

**16.** Les calculs n'étant pas compliqués, il était important de préciser les propriétés mises en jeu : linéarité de l'espérance, indépendance des variables aléatoires.

**18b.** Question calculatoire où étaient attendues des justifications : indépendance mutuelle, même loi...

Les questions suivantes ont été très peu abordées.

*Commentaires généraux.*

Les calculs de sommes liées aux séries entières sont plutôt bien maîtrisés par les candidats, ainsi que l'utilisation de la convergence monotone.
On trouve souvent des rédactions insuffisamment rigoureuses, telles par exemple des simplifications du type $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$ sans prêter attention au cas $k = 0$, le passage à une borne supérieure sans justifier