l'existence, ou des calculs d'espérance de variables aléatoires dans lesquels la convergence absolue n'est jamais invoquée.
Parmi les erreurs de raisonnement régulièrement rencontrées, on peut citer l'utilisation d'une récurrence faible au lieu d'une récurrence forte ou l'utilisation de résultats (par exemple le critère de d'Alembert) sans la vérification des hypothèses. Signalons aussi qu'une série entière de rayon de convergence R ne convergence pas nécessairement pour $x = R$.

Conseils à destination des candidats.

Le premier conseil que l'on pourrait donner aux candidats est de lire les précédents rapports de jury. Certaines erreurs ont déjà été signalées, et il n'est pas acceptable pour des enseignants en exercice de confondre les inégalités strictes et larges, d'autant plus que ceci a déjà été pointé dans plusieurs rapports. De même, la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre est souvent très mal réalisée. Au passage, certains candidats ne proposent que des solutions qui sont toujours strictement positives, ce qui devrait les inquiéter.
Les termes tels *évidents*, *facile* sont à bannir du vocabulaire, et plus encore les arguments d'autorité non expliqués, tels *on a nécessairement*. Les questions « faciles » peuvent être traitées de manière concise mais précise, l'argument clé est attendu ; à titre d'exemple, dire que 9 est une conséquence de 7 et 8 sans autre information ne rapporte pas de point. Il ne s'agit pas non plus de proposer plusieurs solutions au correcteur, lui laissant le soin de choisir.
Dans une démonstration par récurrence, on attend clairement l'énoncé de l'hypothèse de récurrence. Dans la partie II, il s'agissait de montrer ce qui semblait être des évidences pour certains candidats, mais ces « évidences » sont parfois fausses. Par exemple, même la connaissance du cadre des séries devrait montrer au candidat que l'associativité ou la commutativité ne passe pas toujours aux sommes infinies. On a curieusement lu assez souvent dans la deuxième partie que I, J, ou I_k était un intervalle (ce terme a un sens précis en mathématiques), parfois que les I_k étaient des ensembles finis. Quelques-uns, dans 7b, font « varier » les I_k, qui sont pourtant une donnée de l'énoncé.

2.2.3 Quelques éléments de correction

Comme rappelé précédemment, les éléments de correction donnent les grandes lignes de résolution des questions ; ils ne correspondent pas à la rédaction attendue par le jury. Dans leurs copies, les candidats doivent rédiger soigneusement et apporter une attention particulière aux justifications de leurs affirmations et de leurs calculs. Les rappels, les définitions des objets mathématiques et les énoncés des résultats utilisés sont indispensables ; par ailleurs, avant d'appliquer un résultat que l'on vient d'énoncer il est indispensable d'en vérifier les hypothèses.

Notations.

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ désignera le corps des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. De plus, n désignera un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour X est une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance (lorsqu'elle existe) et $\mathbf{V}(X)$ sa variance (lorsqu'elle existe).
On rappelle que, sous réserve d'existence, la covariance de deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω est le nombre réel noté $\mathbf{Cov}(X, Y)$ et défini par

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

En conséquence, sous réserve de l'existence de $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(X+Y)$:

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y).$$

Objectifs du problème.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On se place dans le contexte où la loi de X n'est pas complètement spécifiée et où cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu. Le but de l'estimation consiste à approcher la valeur de ce paramètre θ, ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g.
La première partie revient sur quelques résultats au sujet des séries entières. La deuxième partie étudie les familles sommables. Dans les deux dernières parties, on se place dans le cas où X est une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi de Poisson de paramètre θ inconnu et on développe quelques outils pour l'estimation de ce paramètre.

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

C'est vrai. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Comme les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont positifs, la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$U_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée. Elle est donc croissante et majorée, donc convergente. La série de terme général u_n converge donc.

(b) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

C'est faux. On peut considérer par exemple les suites définies par $u_n = -1$ et $v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La série de terme général v_n converge mais la série de terme général u_n diverge, bien que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k \leqslant v_k$.

(c) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell,$$

avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».

C'est vrai (critère de d'Alembert). Posons $q = \dfrac{\ell+1}{2}$. Comme $0 \leqslant \ell < 1$, $0 \leqslant \ell < q < 1$. Posons $\epsilon = q - \ell > 0$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $k \geqslant N$,

$$\left|\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| - \ell\right| \leqslant \epsilon.$$

Par suite, si $k \geqslant N$,

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant \ell + \epsilon = q.$$

Une récurrence simple montre alors que si $k \geqslant N$, $|u_k| \leqslant q^{k-N}|u_N|$. La série de terme général q^k converge car $|q| < 1$, donc la série de terme général $q^N q^{-k}|u_N|$ converge également. Par suite, la série de terme général $|u_k|$ converge.

(d) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

C'est faux. Prenons par exemple $I = [0, 1]$ et $u_k : I \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $u_k(x) = x^k$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, u_k est continue. De plus,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1, \\ 0 \text{ si } x \in [0, 1[. \end{cases}$$

La fonction limite U n'est donc pas continue.

2. *Question de cours*. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_k x^k$ est défini par

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid (|u_k x^k|)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que si $|x| < R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

Supposons $|x| < R$. Par définition de R, il existe $R' > |x|$ tel que $(|u_k R'^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|u_k x^k| \leqslant |u_k||x|^k \leqslant |u_k| \left(\frac{|x|}{R'}\right)^k R'^k \leqslant M \left(\frac{|x|}{R'}\right)^k.$$

Comme $\dfrac{|x|}{R'} \in [0, 1[$, la série de terme général $M\left(\dfrac{|x|}{R'}\right)^k$ converge. Par majoration, la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

ii. Montrer que si $|x| > R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

Si $R = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposon R fini et $|x| > R$. Par définition de R, la suite $(u_k x^k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, donc ne tend pas vers 0. Par suite, la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

On considère alors la fonction $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k.$$

(b) Soit $R' \in]0, R[$. Montrer que la série de terme général $u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$. Que peut-on en déduire sur la régularité de S ?

Soit $x \in [-R', R']$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|u_k x^k| \leqslant |u_k R'^k|.$$

Comme $R' \in]0, R[$, d'après 2(a)i, la série de terme général $|u_k R'^k|$ converge. Donc la série de terme général $u_k x^k$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[-R', R']$.

Comme le terme général $u_k x^k$ est continu, on en déduit que S est continue sur $[-R', R']$ pour tout $R' \in [0, R[$. En conséquence, S est continue sur l'intervalle ouvert

$$\bigcup_{R'\in[0,R[}]-R, R'[=]-R, R[.$$

(c) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $(k+1)u_{k+1}x^k$ est égal à R.

Soit R' le rayon de convergence de la série dérivée. Supposons $|x| < R'$. Alors la suite $(|(k+1)u_{k+1}x^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M, par définition de R'. Si $k \geqslant 1$,

$$|u_k x^k| \leqslant |k u_k x^{k-1}||x| \leqslant MR',$$

donc la suite $(|u_k x^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée. Par définition de R, $|x| \leqslant R$. Ceci étant valable pour tout x tel que $|x| < R'$, on en déduit que $R' \leqslant R$.

Supposons $|x| < R$. Si $x = 0$, le résultat est évident. Sinon, posons $R'' = \dfrac{R + |x|}{2}$. Alors $|x| < R'' < R$, donc $(|u_k R''^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M''. Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|(k+1)u_{k+1}x^k| = \frac{k+1}{|x|}|u_{k+1}x^{k+1}| = \frac{k+1}{|x|}\left(\frac{|x|}{R''}\right)^{k+1}|u_{k+1}R''^{k+1}| =\leqslant \frac{k+1}{|x|}\left(\frac{|x|}{R''}\right)^{k+1} M''.$$

Comme $\dfrac{|x|}{R''} \in [0, 1[$, la suite $\left((k+1)\left(\dfrac{|x|}{R''}\right)^{k+1}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, donc est majorée par un réel N. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|(k+1)u_{k+1}x^k| \leqslant \frac{1}{|x|}NM''.$$

Par définition de R', $|x| \leqslant R'$. Ceci étant valable pour tout x tel que $|x| < R$, on en déduit que $R \leqslant R'$.

(d) Montrer que S est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.

Soit $R' \in [0,R[$. La série de terme général $u_k x^k$ converge sur $]-R',R'[$ d'après (b). De plus, la série dérivée ayant le même rayon de convergence d'après (c), toujours d'après (b) elle converge uniformément sur $]-R,R'[$. D'après le théorème de dérivation des séries, S est donc dérivable sur $]-R,R'[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-R,R'[, \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)u_{k+1}x^k.$$

En conséquence, S est dérivable sur l'union des intervalles $]-R',R'[$ avec $0 < R' < R$, soit l'intervalle $]-R,R[$.

Montrons par récurrence sur N que tout série entière de rayon de converge R est N-fois dérivable sur $]-R,R[$. On vient de le démonter pour $N=1$. Soit $N \geqslant 1$, tel que le résultat soit vrai. Soit S une série entière de rayon R. Sa dérivée est alors également donnée par une série entière, de même rayon de convergence R d'après (c). L'hypothèse de récurrence implique que S' est N fois dérivable sur $]-R,R[$, donc S est $N+1$ fois dérivable sur $]-R,R[$. D'après le principe de récurrence, S est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.

3. Soit r un entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{k^r x^k}{k!}$. Déterminer sa somme lorsque $r=1$ et lorsque $r=2$.

Soit $k \in \mathbf{N}$.

$$\left|\frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{k^r x^k}\right| = \left(\frac{k+1}{k}\right)^r \frac{1}{k+1}|x| = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{r-1}|x|.$$

Ceci tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. D'après la question 1.(c), cette série entière converge pour tout $x \in \mathbf{R}$, donc son rayon de convergence est $+\infty$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^1}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^k = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}x^{l+1} = x\mathrm{e}^x,$$

avec le changement d'indices $l = k-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)+k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!}x^k + x\mathrm{e}^x \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}x^k + x\mathrm{e}^x \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}x^{l+2} + x\mathrm{e}^x \\
&= x^2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x,
\end{aligned}$$

avec le changement d'indices $l = k-2$.

4. On note, pour tout entier $N \geqslant 1$, α_N le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,N]\!]$ et on convient que $\alpha_0 = 1$.

(a) Calculer α_1, α_2 et α_3.

$\alpha_1 = 1$, correspondant à la partition $\{\{1\}\}$, $\alpha_2 = 2$, correspondant aux partitions $\{\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2\}\}$ Les partitions de $\{1,2,3\}$ sont

$$\{\{1,2,3\}\}, \qquad \{\{1\},\{2,3\}\}, \qquad \{\{2\},\{1,3\}\}, \qquad \{\{3\},\{1,2\}\}, \qquad \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

donc $\alpha_3 = 5$.

(b) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 0$,

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

Pour tout ensemble fini I, on note P_I l'ensemble de partitions de I. Alors $|P_I| = \alpha_{|I|}$. Soit π une partition de $[\![1, N+1]\!]$. L'unique élément de π contenant $N+1$ est noté π_{N+1}. De plus, si $\pi \neq \{[\![1, N+1]\!]\}$, alors $\pi \setminus \{\pi_{N+1}\}$ est une partition de $[\![1, N+1]\!] \setminus \pi_{N+1}$. On obtient donc une bijection

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_{[\![1,N+1]\!]} \setminus \{\{[\![1, N+1]\!]\}\} & \longrightarrow & \displaystyle\bigsqcup_{I \subsetneq [\![1,N]\!]} P_{[\![1,N]\!] \setminus I} \\ \pi & \longrightarrow & \pi \setminus \{\pi_{N+1}\}, \end{array} \right.$$

En comparant les cardinaux, on obtient

$$\alpha_{N+1} - 1 = \sum_{I \subsetneq [\![1,N]\!]} \alpha_{N-|I|} = \sum_{p=0}^{N-1} \binom{N}{p} \alpha_{N-p} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{N-k} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k,$$

avec le changement d'indice $k = N - p$. Comme $\binom{N}{0}\alpha_0 = 1$, on obtient

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

(c) Montrer que, pour tout $N \geqslant 0$, $\alpha_N \leqslant N!$.

Démontrons le par récurrence (forte) sur N. D'après (a), c'est vrai si $N = 0$, 1, 2 ou 3. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \leqslant N$, $\alpha_k \leqslant k!$. D'après (b),

$$\alpha_{N+1} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} k! = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!k!} k! = N! \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\frac{1}{(N-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant (N+1)!.$$

Donc le résultat est vrai à tout rang N.

(d) En déduire que la série entière de terme général $\dfrac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme.

Si $|x| \leqslant 1$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, d'après (c),

$$\left| \frac{\alpha_N}{N!} x^N \right| \leqslant 1.$$

Par définition du rayon de convergence, $R \geqslant 1$.

(e) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.
En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.
D'après 2., f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(N+1)\alpha_{N+1}}{(N+1)!} x^N \\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{N+1}}{N!} x^N \\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!(N-k)!} \alpha_k \right) x^N && \text{d'après (b)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \right) \\
&= \mathrm{e}^x f(x).
\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité est vraie car les deux séries entières apparaissant convergent absolument sur $]-1,1[$, leur rayon de convergence étant tous les deux supérieur ou égal à 1.

(f) En déduire que pour tout entier naturel N,

$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.
De plus,

$$f(0) = \alpha_0 = 1 = C\mathrm{e},$$

donc $C = \mathrm{e}^{-1}$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{N=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!N!} x^N \right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!} \right) \frac{x^N}{N!},$$

d'après le théorème de Fubini, cette série double convergeant absolument sur $]-1,1[$. En identifiant les coefficients de cette série entière, on obtient, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

II. Familles sommables.

Soit $I \subset \mathbb{N}^n$. Les éléments de I seront notés sous la forme $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Cas des familles sommables de réels positifs.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la borne supérieure suivante est finie :

$$\sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \textit{ et } J \textit{ fini} \right\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on note

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \textit{ et } J \textit{ fini} \right\}.$$

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ et $(v_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ deux familles de réels positifs et a, b deux réels positifs.

5. On suppose que pour tout $\underline{i} \in I$,

$$u_{\underline{i}} \leqslant v_{\underline{i}}.$$

Montrer que si v est sommable, alors u est sommable.
Soit J une partie finie de I.

$$\sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in J} v_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}},$$

par définition de $\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}$. Par définition, u est sommable. On en déduit également que

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}.$$

6. On suppose que u et v sont sommables. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et que

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \right) + b \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}} \right).$$

Soit J une partie finie de I.

$$\sum_{\underline{i} \in J} au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}} = a \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in J} v_{\underline{i}} \leqslant a \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}},$$

car a et b sont positifs. Par suite, $au + bv$ est sommable et

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) \leqslant a \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sum_{i \in I} u_i$, il existe $J \subseteq I$, fini, tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \geqslant \sum_{i \in I} u_i - \frac{\varepsilon}{2a},$$

avec la convention $\frac{\varepsilon}{0} = 1$ si $a = 0$. De même, il existe $K \subseteq J$, fini, tel que

$$\sum_{i \in K} v_i \geqslant \sum_{i \in I} v_i - \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Comme a, b tous les u_i et tous les v_i sont positifs,

$$\sum_{i \in J \cup K} (au_i + bv_i) = a \sum_{i \in J \cup K} u_i + b \sum_{i \in J \cup K} v_i \geqslant a \sum_{i \in J} u_i + b \sum_{i \in K} v_i \geqslant a \sum_{i \in I} u_i + b \sum_{i \in I} v_i - \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\sum_{i \in I} (au_i + bv_i) \geqslant a \sum_{i \in I} u_i + b \sum_{i \in I} v_i - \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\sum_{i \in I} (au_i + bv_i) \geqslant a \sum_{i \in I} u_i + b \sum_{i \in I} v_i,$$

ce qui donne pour finir l'égalité demandée.

7. On considère $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

▷ $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$.

▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{i \in I_k} u_i = 0.$$

On suppose que u est sommable.

(a) Montrer que la famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $J \subseteq I_k$, finie. Alors J est aussi une partie finie de I et donc

$$\sum_{i \in J} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i.$$

Par définition, $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right) \leqslant \sum_{i \in I} u_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, il existe $I'_k \subseteq I_k$, finie, telle que

$$\sum_{i \in I'_k} u_i \geqslant \sum_{i \in I_k} u_i - \frac{\varepsilon}{p+1}.$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i\in I_k} u_i - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{p}\sum_{i\in I'_k} u_i = \sum_{i\in I'_0\cup\ldots\cup I'_p} u_i,$$

les I'_k étant disjoints (car les I_k le sont). Comme $I'_0 \cup \ldots \cup I'_p$ est une partie finie de I,

$$\sum_{i\in I'_0\cup\ldots\cup I'_p} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i\in I_k} u_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i\in I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

(c) Montrer que la série de terme général $\sum_{i\in I_k} u_i$ converge. Sa somme est notée $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_k} u_i$.

C'est une série à termes positifs et la suite des sommes partielles est bornée d'après (b). Elle converge donc.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

C'est une conséquence directe de (b), en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$.

8. Réciproquement, montrer que si la famille $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la série de terme général $\sum_{i\in I_k} u_i$ converge, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_k} u_i.$$

Soit $J \subseteq I$, fini. Pour tout k, posons $J_k = J \cap I_k$. Alors J_k est une partie finie de I_k et, de plus, seul un nombre fini de J_k sont non vides. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in J} u_i &= \sum_{k\in\mathbf{N},\, J_k\neq\emptyset}\ \sum_{i\in J_k} u_i \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbf{N},\, J_k\neq\emptyset}\ \sum_{i\in I_k} u_i && \text{par définition de } \sum_{i\in I_k} u_i \\
&\leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i\in J_k} u_i}_{<\infty} && \text{car il s'agit d'une série à termes positifs.}
\end{aligned}$$

Par définition, u est sommable et

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

9. Déduire des questions précédentes le résultat suivant, appelé *théorème de sommation par paquets* :
$(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable. De plus, dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

$\Longrightarrow$: il s'agit des questions 7(a) et 7(c). $\Longleftarrow$: il s'agit de la question 8. De plus, si ces hypothèses sont vérifiées, d'après les questions 7(d) et 8,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Cas des familles sommables de réels quelconques.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la famille de réels positifs ou nuls $|u| = (|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I}$ est sommable.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. Pour tout $\underline{i} \in I$, on pose

$$u_{\underline{i}}^{+} = \max\left(u_{\underline{i}}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad u_{\underline{i}}^{-} = \max\left(-u_{\underline{i}}, 0\right).$$

Ceci définit deux familles $u^+ = (u_{\underline{i}}^+)_{\underline{i}\in I}$ et $u^- = (u_{\underline{i}}^-)_{\underline{i}\in I}$ de réels positifs ou nuls.

10. Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. Montrer que la famille u est sommable si et seulement si les familles u^+ et u^- sont sommables.

$\Longrightarrow$: pour tout $\underline{i} \in I$, $u_{\underline{i}}^-, u_{\underline{i}}^+ \leqslant |u_{\underline{i}}|$. D'après la question 5, comme $|u|$ est sommable, u^+ et u^- sont sommables.
$\Longleftarrow$: pour tout $\underline{i} \in I$, $|u_{\underline{i}}| = u_{\underline{i}}^+ + u_{\underline{i}}^-$. D'après la question 6, comme u^+ et u^- sont sommables, $|u|$ est sommable.
Pour $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille sommable de réels, on définit alors sa somme par

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^+\right) - \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^-\right).$$

11. Soient $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ et $v = (v_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ deux familles sommables de réels.

(a) Montrer que la famille $u+v$ définie par

$$(u+v)_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}$$

est sommable et

$$\sum_{\underline{i}\in I}(u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}) = \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}\right) + \left(\sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}\right).$$

Pour tout $\underline{i} \in I$,

$$|w_{\underline{i}}| \leqslant |u_{\underline{i}}| + |v_{\underline{i}}|.$$

D'après la question 6, la famille $|w|$ est sommable et donc la famille w est sommable. De plus, pour tout $\underline{i} \in I$,

$$w^+_{\underline{i}} - w^-_{\underline{i}} = w_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}} = u^+_{\underline{i}} - u^-_{\underline{i}} + v^+_{\underline{i}} - v^-_{\underline{i}},$$

ce qui donne

$$w^+_{\underline{i}} + u^-_{\underline{i}} + v^-_{\underline{i}} = w^-_{\underline{i}} + u^+_{\underline{i}} + v^+_{\underline{i}}.$$

Les familles w^+, w^-, u^+, u^-, v^+ et v^- étant à termes positifs, on en déduit (question 6) que

$$\sum_{\underline{i}\in I} w^+_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} u^-_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} v^-_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} w^-_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} u^+_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} v^+_{\underline{i}},$$

puis que

$$\sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} w^+_{\underline{i}} - \sum_{\underline{i}\in I} w^-_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u^+_{\underline{i}} - \sum_{\underline{i}\in I} u^-_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} v^+_{\underline{i}} - \sum_{\underline{i}\in I} v^-_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}.$$

(b) Soient a et b deux réels. Montrer que la famille $au+bv$ définie par

$$(au+bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et déterminer sa somme en fonction des sommes de u et v.

Posons $u' = au$ et $v' = bv$. Alors $|u'| = |a||u|$ et $|v'| = |b||v|$: d'après la question 6, $|u'|$ et $|v'|$ sont sommables, donc u' et v' sont sommables. D'après la question 11(a), $u'+v' = au+bv$ est sommable et de plus

$$\sum_{\underline{i}\in I}(au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = \sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} bv_{\underline{i}}.$$

Si $a \geqslant 0$, alors $(au)^+ = au^+$ et $(au^-) = au^-$. On en déduit que dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

Si $a \leqslant 0$, alors $(au)^+ = -au^-$ et $(au)^- = -au^+$ et on a également

$$\sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

En procédant de même pour bv, on obtient

$$\sum_{\underline{i}\in I}(au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a\sum_{\underline{i}\in I} a_{\underline{i}} + b\sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}.$$

12. On considère $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

- ▷ $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$.
- ▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

Montrer que $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable. De plus dans ce cas, vérifier que

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

$\Longrightarrow$: par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable et et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge. D'après la question 9, la famille $|u|$ est sommable, donc la famille u est sommable.

$\Longleftarrow$. D'après la question 9, comme $|u|$ est sommable, les familles $(|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I_k}$ sont sommables et donc les familles $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ sont sommables. De plus, la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge.

Supposons ces propriétés vérifiées. Par la question 9 appliquées à u^+ et u^-,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u^+_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u^+_{\underline{i}},$$
$$\sum_{\underline{i}\in I} u^-_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u^-_{\underline{i}}.$$

En calculant la différence :

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u^+_{\underline{i}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u^-_{\underline{i}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\underline{i}\in I_k} u^+_{\underline{i}} - \sum_{\underline{i}\in I_k} u^-_{\underline{i}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.\end{aligned}$$

Application : Théorème du transfert.

13. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $T = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ soit encore une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, l'univers-image de X_i est noté

$$X_i(\Omega) = \{x_{i,j} \mid j \in I_i\},$$

où I_i est une partie de $\mathbb{N}$. On pose $I = I_1 \times \ldots \times I_n$.
Montrer que les deux assertions (A_1) et (A_2) suivantes sont équivalentes :

(A_1) T admet une espérance.

(A_2) La famille $\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right)\right)_{\underline{i}\in I}$ est sommable.

De plus dans ce cas, vérifier que

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{(i_1 i_2,\dots,x_k)\in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

On remarque que $\varphi(I)$ est fini ou dénombrable. Posons $\varphi(I) = J = \{j_k \mid k \in J'\}$, avec $J' = \mathbf{N}$ ou de la forme $\{1, \dots, p\}$, suivant les cas. Pour tout $k \in J'$, posons $J_k = \varphi^{-1}(\{j_k\})$. La variable aléatoire T_n possède une espérance si, et seulement si, la série de terme général $j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \dots, X_n) = j_k]$ converge absolument. De plus,

$$j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \dots, X_n) = j_k] = \sum_{\underline{i}\in J_k} \varphi(x_{1,i_1}, \dots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

Par le théorème de sommation par paquets, T_n admet une espérance si et seulement si la famille $\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right)\right)_{\underline{i}\in I}$ est sommable. Si c'est bien le cas, alors par le théorème de sommation par paquets,

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k\in J'} j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \dots, X_n) = j_k] = \sum_{(i_1 i_2,\dots,x_k)\in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

III. Estimateurs.

Soit I un intervalle ouvert, non vide, inclus dans $]0, +\infty[$.

On considère une variable aléatoire X définie sur Ω suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel $\theta \in I$, inconnu : autrement dit, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel k,

$$\mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}.$$

On cherche à approcher la valeur de ce paramètre θ, ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g définie sur I.

14. (a) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que X admet des moments d'ordre r pour tout r entier naturel non nul (c'est-à -dire que X^r admet une espérance pour tout r entier naturel non nul) puis que l'espérance et la variance de X sont égales à θ.

La série de terme général $k^r\mathbf{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\theta}\frac{k^r}{k!}\theta^k$ converge absolument d'après la question 3, donc par le théorème du transfert, X^r possède une espérance. Toujours d'après la question 3,

$$\mathbf{E}(X) = \mathrm{e}^{-\theta}\theta\mathrm{e}^{\theta} = \theta,$$
$$\mathbf{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\theta}(\theta\mathrm{e}^{\theta} + \theta^2\mathrm{e}^{\theta}) = \theta + \theta^2.$$

Donc X possède une variance et d'après la formule de Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \theta.$$

(b) Donner une interprétation combinatoire des moments d'ordre r de X lorsque $\theta = 1$.
Lorsque $\theta = 1$,

$$\mathbf{E}(X^r) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^r}{k!} = \alpha_r,$$

où α_r est le nombre de partitions de $[\![1, r]\!]$ d'après la question 4.

15. Soit n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ définies sur Ω, mutuellement indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètre respectif $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$. *Indication* : on pourra démontrer d'abord le cas $n = 2$.

On commence par le cas $n = 2$. L'univers-image de $Y_1 + Y_2$ est inclus dans $\mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[Y_1 + Y_2 = n] &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} [Y_1 = k,\ Y_2 = n-k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[Y_1 = k,\ Y_2 = n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[Y_1 = k]\mathbf{P}[Y_2 = n-k] \qquad \text{car } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= \mathrm{e}^{-\theta_1}\mathrm{e}^{-\theta_2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta_1^k}{k!} \frac{\theta_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\theta_1+\theta_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \theta_1^k \theta_2^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-(\theta_1+\theta_2)} \frac{1}{n!} (\theta_1 + \theta_2)^n.
\end{aligned}$$

Donc $Y_1 + Y_2$ suit une loi de Poisson $\theta_1 + \theta_2$.
Pour montrer le cas général, on procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geqslant 2$. Par l'hypothèse de récurrence, $Y_1 + \ldots + Y_{n-1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta_1 + \ldots + \theta_{n-1}$. De plus, $Y_1 + \ldots + Y_{n-1}$ et Y_n sont indépendantes. Par le cas $n = 2$, $Y_1 + \ldots + Y_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta_1 + \ldots + \theta_n$.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, mutuellement indépendantes, et de même loi que X. Soit φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ soit encore une variable aléatoire définie sur Ω.

- ▷ *Le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est appelé un n-échantillon de la loi de X et la variable aléatoire $T_n = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est appelée un estimateur de $g(\theta)$.*
- ▷ *Après une réalisation de l'expérience aléatoire associée à Ω, on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par $X_1, X_2, \ldots, X_n$: ce sont les* observations de l'échantillon. *Le réel $t = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est*

appelé une réalisation de l'estimateur T_n de $g(\theta)$ et est choisie comme estimation ponctuelle de la valeur de $g(\theta)$.

Autrement dit, estimer ponctuellement $g(\theta)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur expérimentale $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Les outils suivants vont nous permettre d'étudier les estimateurs et de choisir le plus pertinent : soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X et T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance $\mathbf{E}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ.

- ▷ *Le réel* $\mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$ *est appelé* biais *de T_n et est noté $b_\theta(T_n)$.*
- ▷ *L'estimateur T_n est dit* sans biais *lorsque $b_\theta(T_n) = 0$, c'est-à -dire lorsque $\mathbf{E}(T_n) = g(\theta)$.*
- ▷ *Si l'estimateur T_n admet une variance $\mathbf{V}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ, on appelle* risque quadratique *de T_n le réel*

$$r_\theta(T_n) = \mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))^2\right) = b_\theta(T_n)^2 + \mathbf{V}(T_n).$$

En particulier si T_n est sans biais, alors $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}(T_n)$.

Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ admettant une espérance est dite asymptotiquement sans biais *lorsque* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0$.

On commence par étudier deux estimateurs de θ : la moyenne et la variance empiriques. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On définit la moyenne empirique $\overline{X_n}$ *de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et la* variance empirique $\overline{S_n}$ *de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \overline{S_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2.$$

16. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $\dfrac{\theta}{n}$.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta = \theta.$$

Donc $b_\theta(\overline{X_n}) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
r_\theta(\overline{X_n}) &= \mathbf{V}(\overline{X_n}) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(X_k) && \text{car les } X_k \text{ sont indépendants} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\theta \\
&= \frac{\theta}{n}.
\end{aligned}$$

17. (a) Montrer que
$$n\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.$$
En déduire $\mathbf{E}(\overline{S_n})$.

$$\begin{aligned}
n\overline{S_n} &= \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\overline{X_n}\sum_{k=1}^{n} X_k + n\overline{X_n}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\overline{X_n}^2 + n\overline{X_n}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(n\overline{S_n}) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k^2) - n\mathbf{E}(\overline{X_n}^2) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= n\mathbf{E}(X_1^2) - n\mathbf{E}(\overline{X_n}^2) && \text{car les } X_k \text{ suivent tous la même loi} \\
&= n(\theta+\theta^2) - n\left(\mathbf{V}(\overline{X_n}) + \mathbf{E}\left(\overline{X_n}^2\right)\right) && \text{par la formule de Huyghens} \\
&= n(\theta+\theta^2) - n\left(\frac{\theta}{n} + \theta^2\right) \\
&= (n-1)\theta.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{E}(\overline{S_n}) = \dfrac{n-1}{n}\theta$.

(b) Montrer que $\overline{S_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.
Par suite,
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbf{E}(\overline{S_n}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n-1}{n}\theta = \theta,$$
donc $\overline{S_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

(c) Montrer que $\widehat{S_n} = \dfrac{n}{n-1}\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais de θ. Cet estimateur est appelé *variance empirique corrigée*.
Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}(\widehat{S_n}) = \frac{n}{n-1}\mathbf{E}(\overline{S_n}) = \theta.$$
Donc $\widehat{S_n}$ est un estimateur sans biais de θ.

18. (a) Montrer que
$$n\overline{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2\right) - n(\overline{X_n}-\theta)^2.$$

D'une part,

$$n\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2\right) - n(\overline{X_n}-\theta)^2 &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\theta\sum_{k=1}^{n} X_k + n\theta^2 - n\overline{X_n}^2 + 2n\theta\overline{X_n} - n\theta^2\\ &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\theta\overline{X_n} + n\theta^2 - n\overline{X_n}^2 + 2n\theta\overline{X_n} - n\theta^2\\ &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2\\ &= n\overline{S_n}.\end{aligned}$$

(b) En déduire que $n\overline{S_n}$ admet une variance donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{V}\left(n\overline{S_n}\right) = n\mathbf{V}\left((X-\theta)^2\right) - 2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right).$$

Posons

$$Y = \sum_{k=1}^{n}(X_k^2-\theta)^2, \qquad\qquad Z = -n(\overline{X_n}-\theta)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(n\overline{S_n}\right) &= \mathbf{V}(Y+Z)\\ &= \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z) + 2\mathbf{Cov}(Y,Z)\\ &= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n\mathbf{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right)\\ &= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Cov}\left((X_k-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right)\\ &= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right)\end{aligned}$$

par la symétrie entre $X_1,\ldots,X_n$. Comme $X_1,\ldots,X_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de $(X_1^2-\theta)^2,\ldots,(X_n^2-\theta)^2$. Par suite,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k^2-\theta)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\left((X_k^2-\theta)^2\right) = n\mathbf{V}\left((X^2-\theta)^2\right)$$

car $X_1,\ldots,X_n$ et X suivent la même loi. Le résultat annoncé est maintenant entièrement démontré.

(c) Montrer que

$$n^4\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right) = n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 3n(n-1)\theta^2.$$

Indication : on remarquera que lorsqu'on développe $\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4$, on obtient des termes de la forme $(X_i-\theta)^4$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2$ ou $(X_i-\theta)^3(X_j-\theta)$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)(X_k-\theta)$ ou $(X_i-\theta)(X_j-\theta)(X_k-\theta)(X_l-\theta)$ avec i,j,k,l distincts deux à deux, dont on précisera l'espérance.

$$n^4\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right)=\mathbf{E}\left((n\overline{X_n}-n\theta)^4\right)=\mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4 &= \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^4+\binom{4}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2\\ &\quad+\text{somme de termes de la forme }(X_i-\theta)^3(X_j-\theta)\\ &\quad\text{ou }(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)(X_k-\theta)\text{ ou }(X_i-\theta)(X_j-\theta)(X_k-\theta)(X_l-\theta),\\ &\quad\text{avec }i,j,k,l\text{ tous distincts.}\end{aligned}$$

Comme les X_i sont mutuellement indépendant,

$$\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^3(X_j-\theta)\right)=\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^3\right)\mathbf{E}(X_j-\theta)=0,$$

car $\mathbf{E}(X_j)=\theta$ et donc $\mathbf{E}(X_j-\theta)=0$. De la même manière, les autres termes indiqués sont d'espérance nulle. Par linéarité de l'espérance et comme les X_i sont mutuellement indépendants,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right)+6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right)+6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^2\right)\mathbf{E}\left((X_j-\theta)^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right)+6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{V}(X_i)\mathbf{V}(X_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{V}(X)^2\\ &= n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+6\frac{n(n-1)}{2}\mathbf{V}(X)^2\\ &= n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+3n(n-1)\mathbf{V}(X)^2,\end{aligned}$$

car $X_1,\dots,X_n$ suivent tous la même loi que X.

(d) En déduire que

$$n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right)=\frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+(2n-3)\theta^2}{n}.$$