Chapitre 2

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux. Il est conseillé de travailler les preuves élémentaires qui, outre l'assimilation du programme, permettent de résoudre un bon nombre de questions en début de problème. Un entraînement régulier à la résolution de problèmes permet d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Il est attendu dans les copies les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- le soin, la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe ;
- l'utilisation de quantificateurs appropriés. Trop nombreuses sont les copies dans lesquelles les démonstrations ne comportent aucun quantificateur. Ce manque de rigueur dans les preuves est à corriger ;
- la rigueur de la rédaction : choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; citer clairement les théorèmes ou résultats invoqués, en vérifier les hypothèses et s'abstenir de citer des hypothèses sans rapport avec le théorème ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;

Quelques conseils de méthode :

Avant de se lancer dans la résolution de la première question, a fortiori avant de commencer sa rédaction, il est recommandé aux candidats de prendre le temps de lire l'énoncé dans son intégralité afin d'identifier les thèmes abordés, de repérer la progressivité des questions et les notions nouvelles qui sont introduites. Cela permet en général de fixer un cadre clair dans lequel se situe l'épreuve. Cela évite en outre à un moment donné la "démonstration" de résultats manifestement en contradiction avec une question ultérieure.
Il est profitable de "prendre en main" les hypothèses des questions, par exemple en les notant au brouillon dans la phase de recherche. Cela clarifie le but à atteindre. Trop de candidats partent d'emblée sur des pistes qui ne peuvent aboutir en cherchant ce qui est déjà donné, sans objectif clair, ou encore sans recul par rapport aux (nouveaux) objets manipulés. Répétons-le : un objectif à atteindre clairement identifié est une condition nécessaire à la bonne résolution d'une question de

mathématiques.
Il convient notamment de rappeler que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques et qu'il est incorrect de les utiliser comme des abréviations.
Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

2.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/22-ep1.pdf

2.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions.

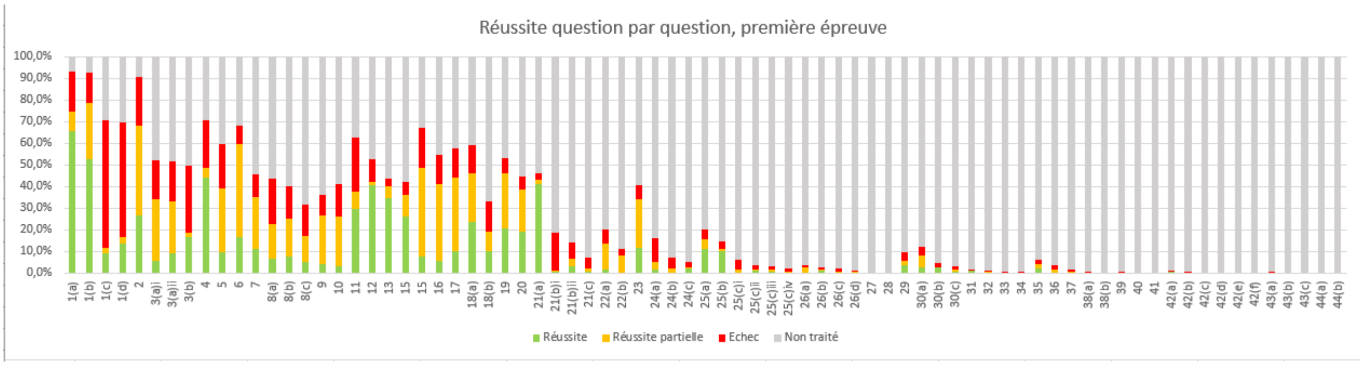

FIGURE 2.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge correspond aux réponses erronées.

2.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Présentation du problème
Le sujet de la première épreuve écrite de l'agrégation interne 2022 portait sur la recherche de solutions non nulles, sous la forme de matrices, d'équations d'inconnues X, Y et Z de la forme $X^n + Y^n = Z^n$ avec n un entier strictement positif. Après un exercice " vrai ou faux" et un exercice préliminaire portant sur une démonstration du théorème de Cayley Hamilton, les différentes parties du problème traitent de la résolution de l'équation matricielle dans différents espaces de matrices.

Dans l'ensemble, les copies sont, fort heureusement, très rarement indigentes. Cependant, la rédaction manque trop souvent de rigueur mathématique. De plus, les objets faisant l'objet de calculs ou de raisonnements ne sont pas systématiquement définis. Les définitions de base et les structures fondamentales ne sont pas connues.
Les démonstrations d'équivalences, tout comme les démonstrations par récurrence, sont trop souvent incorrectement rédigées. L'utilisation des résultats de cours est très souvent laborieuse et souffre d'un manque de vérification des hypothèses.

Dans leurs copies, les candidats se lancent trop souvent dans des calculs longs et inadaptés ; il serait préférable de privilégier la recherche de méthodes adaptées à la résolution des questions. Plus généralement, une lecture attentive du sujet serait sans doute utile aux candidats.
Comme cela était rappelé dans le sujet, les premières questions du sujet nécessitent un soin particulier et les calculs doivent être détaillés.

Dans la suite, on donne des remarques détaillées pour certaines questions. Le plus souvent, on mentionne les erreurs les plus courantes et les écueils de rédaction.

Vrai ou faux ?

1a. Certains candidats se contentent de ne traiter que le cas $n = 2$. Plus généralement, il est préférable d'éviter de maladroitement nommer $m_{i,j}$ les coefficients d'une matrice notée A.

1b. Ici, on ne peut pas se contenter de l'affirmation $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X + \det(M)$. Cette égalité doit être démontrée et l'équivalence demandée doit être correctement justifiée.

1c. Le théorème spectral n'est pas valable sur le corps $\mathbf{C}$. Un contre-exemple était attendu et contrairement à ce que certains candidats pensent, le fait que le polynôme caractéristique d'une matrice soit scindé ne suffit pas à affirmer que cette matrice est diagonalisable.

1d. Très peu de candidats ont su donner un contre-exemple.

Exercice préliminaire

2. La rédaction de la récurrence qui était demandée est presque systématiquement approximative. Très souvent, l'hypothèse de récurrence est mal formulée ou alors l'initialisation n'est pas faite pour $d = 1$; la conclusion du raisonnement n'est pas toujours donnée.

3a-i L'utilisation du théorème de la base incomplète nécessite de bien préciser dans quel espace vectoriel on se place.

3a-ii Alors que cette égalité n'a pas de sens, dans trop de copies on peut lire que $P(M)Q(M)x = P(M)x.Q(M)x$ où P et Q sont des polynômes, M une matrice carrée et x un vecteur.

3b. Le but de la question et de l'exercice est de donner une démonstration du théorème de Cayley Hamilton. Il n'est pas possible d'utiliser ce théorème pour justifier la réponse à la question. Le fait que pour un vecteur x non-nul on ait $\chi_M(M)x = 0$ ne suffit pas pour conclure et dans cette égalité on ne peut évidemment pas simplifier par x.

Problème, I

4. Il n'est pas suffisant d'affirmer que la symétrie de la matrice implique la symétrie de l'endomorphisme sans plus de précisions.

5 Dans cette question, certains candidats confondent les notions " être diagonalisable" et "être diagonale" pour les matrices carrées.

6. Trop de candidats oublient que la matrice $S + T$ est symétrique et n'utilisent pas la question précédente.

7. Bien que cette question corresponde à un résultat classique, il est étonnant de constater qu'elle n'à que très rarement été abordée.

8a. On a noté des confusions entre u et u^n. De plus les candidats oublient la définition d'un endomorphisme symétrique rappelée en préambule.

8c. L'unicité de u_i est rarement démontrée.

9. Les candidats peinent à donner explicitement le lien entre les matrices carrées et les endomorphismes.

10. Il ne faut pas oublier de vérifier que l'application ensembliste est bien définie. Puisque cette application n'est pas linéaire, on ne peut pas parler de son noyau.
Trop de candidats ne maîtrisent pas la notion de bijection.