## 3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep2/21-ep2.pdf

### 3.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

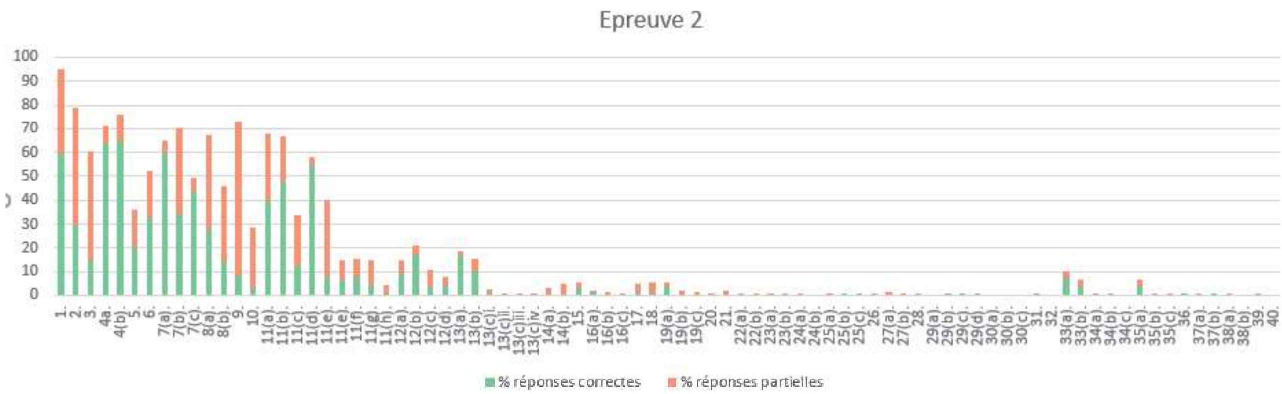


FIGURE 3.2 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste.

### 3.2.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

1. **Présentation du sujet** L'épreuve 2 traite de la thématique des fonctions presque-périodiques. Ces fonctions apparaissent naturellement dès que l'on souhaite travailler avec des fonctions périodiques de toutes périodes. En effet, l'ensemble des telles fonctions n'est pas une algèbre, ni même un espace vectoriel, et n'est pas fermé dans l'e.v.n. des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}$. L'énoncé se limite à l'étude des fonctions presque-périodiques au sens de H. Bohr. Il y a trois définitions équivalentes, le point de vue adopté ici est l'approximation par des polynômes trigonométriques (généralisés) ; on est alors dans l'idée de prolonger tout ce qui se passe pour les fonctions continues périodiques. L'analyse de Fourier est possible, et pour définir les coefficients on prolonge la notion de moyenne d'une fonction périodique via une formule indépendante de la période, qui a le mérite de s'étendre. Contrairement aux fonctions périodiques, l'ensemble $\Lambda(f)$ des $\lambda$ pour lesquels $e_\lambda$ intervient réellement dans la série de Fourier peut avoir 0 comme point d'accumulation. On est en présence du phénomène dit des *petits diviseurs*, qui a par exemple comme première conséquence simple que même si $f$ est p.p. de moyenne nulle, les solutions de $y' = f$ ne sont pas nécessairement p.p. (question **32**), contrairement à ce qui se passe dans le cas périodique (question **9**). Le deuxième but du sujet, en plus d'introduire cette notion et d'aller jusqu'à l'analyse de Fourier, est d'arriver au résultat suivant, certes élémentaire mais tout de même surprenant : les solutions bornées d'un système différentiel autonome $Y' = AY$ en sont exactement ses solutions p.p. Elles apparaissent naturellement et intrinsèquement dans l'étude de solutions bornées. Enfin, la partie **V.B)** permet aux candidats de démontrer leurs compétences sur les équations différentielles : en évitant soigneusement les cas résonnants, en se plaçant par exemple sur des systèmes exponentiellement stables (comme dans le sujet) ou

des systèmes à dichotomie exponentielle, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution p.p. lorsqu'un second membre l'est.

Après l'établissement de quelques résultats pour la suite dans la partie **I** et une étude du cas périodique dans le **II**, le coeur du sujet se situe dans les parties **III** et **IV**, en allant jusqu'au **V.A.** (avec la question **34(c)**). La suite du problème consiste à développer le thème des équations différentielles.

Comme à l'accoutumée, le sujet est d'une longueur certaine, permettant à chaque candidat d'exprimer sa palette de compétences, et il n'est pas nécessaire de traiter une énorme partie du problème pour avoir une très bonne note.

## 2. Remarques d'ordre général

Le premier conseil que nous pourrions donner aux candidats est la lecture des rapports des années précédentes, dont les contenus demeurent d'actualité.

Il semble utile de préciser qu'un soin minimal est attendu lors de la présentation des copies, et qu'il est conseillé de bannir les encres claires qui peuvent être difficiles à lire. Ces points devraient être une évidence pour des candidats dont beaucoup sont déjà des enseignants en exercice, amenés à corriger des copies.

La présence de quantificateurs est souvent utile, voire nécessaire pour qu'une phrase soit comprise. Par exemple, étant donné un réel strictement positif $T$, écrire $f(x+T) = f(x)$ sans quantificateur sur $x$ ne traduit pas que $f$ est $T-$périodique. Ceci serait vrai avec $x = 0$ et $T = 2$ avec la fonction non périodique $f : u$
$mapstou(u-2)$. Si l'on souhaite raisonner par exemple avec un $x$ arbitraire dans toute une question, on peut la commencer par "soit $x$ fixé dans ..."

Le jury est surpris de voir des difficultés sur des notions qui ont longtemps figuré dans les programmes du secondaire ou qui y figurent encore. Il est fortement conseillé aux candidats de réviser ces parties du programme, même si elles leur semblent élémentaires. Ainsi, les bases de la trigonométrie et des nombres complexes semblent parfois mal maîtrisés. Par exemple :

- plusieurs candidats semblent ignorer que si $\beta$ est un nombre réel, le complexe $e^{i\beta}$ est de module 1. Certains ont même pensé que son module pouvait être égal à $|\sin(\beta t)|$ ;
- rappelons que par défaut il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbf{C}$. Ainsi, on évitera d'écrire $1 - i \leqslant e^{ix} \leqslant 1 + i$ ou des choses similaires ;
- certaines copies laissent un $\sin(j\pi)$ (avec $j$ entier) dans des expressions, voire leur trouvent une valeur fausse.

Le jury attire l'attention des candidats sur l'utilisation de la variable muette. Par exemple il est déconseillé d'écrire $\displaystyle\int_0^t f(t)dt$, ce qui a parfois mené à des confusions. Le jury a pu lire des copies dans lesquelles des candidats trouvaient deux valeurs différentes de la somme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(j\pi)}{j\pi}$, selon que $j$ soit nul ou non.

Parmi les erreurs relevées, certaines démontrent de graves lacunes sur les suites. Même si les deux citées ci-dessous concernent des suites de fonctions, ce qui est conceptuellement plus complexe que les suites de nombres réels, la connaissance des suites de nombres réels devrait permettre de les éviter :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 1/n$ ;
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ a parfois été traduit en $f_1$ converge uniformément vers $f$, et que $f_2$ converge uniformément vers $f$, etc...

Il convient de s' assurer de l'existence d'une limite avant de manipuler son symbole.

### 3. Remarques question par question

**1.** Question élémentaire pour s'approprier les notions, mais qui a déjà permis de départager les candidats. Rappelons au passage que l'égalité impliquant l'inégalité large, il suffit d'écrire que $|e^{ix}| = 1$ pour tout $x$ réel pour en conclure que $e_1$ est bornée. Il n'est pas nécessaire d'écrire une majoration. Au demeurant, contrairement à l'égalité, une majoration de $|e_1(x)|$ ne permet pas de conclure quant au caractère non borné de $e_{1+i}$, puisque le produit d'une fonction non bornée par une fonction bornée peut être borné. Ces remarques sont aussi valables plus loin dans le sujet.

**2.** Il est demandé de démontrer d'une part que la suite est une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, puis qu'elle converge uniformément et de donner sa limite. L'aspect continu se traite aisément. On peut aborder le reste par la majoration de $\|f_n\|_\infty$ par $1/n$, le passage par la limite simple n'est pas nécessaire. Les majorations ont souvent été obtenues avec $|x|$ au dénominateur, sans penser à traiter à part le cas $x = 0$. Parfois la continuité est signalée comme se déduisant d'une composition. Si techniquement ce n'est pas inexact, c'est moins trivial que par quotient et donc la composition devrait être écrite. Rappelons que *composée de fonctions* a un sens précis en mathématiques et ne signifie pas *fabriqué à partir de fonctions*. Enfin, rappelons que les phrases $(f_n)_n$ bornée et $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f_n(x))_n$ bornée ne sont pas équivalentes, leurs sens respectifs étant $\sup\limits_n \|f_n\|_\infty < +\infty$ et $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| < +\infty$.

**3.** Question plus difficile que les deux précédentes, mais classique. Notons que l'on a parfois vu des max à la place des sup, ce qui "simplifie" leur côté réel. Le sup existe toujours dans $\overline{\mathbf{R}}$, et non le max. Cette question a cependant été rarement réussie, du fait d'une rédaction souvent trop imprécise, ou plus souvent encore de l'espoir de majorer $\|f_n\|_\infty$ indépendamment de $n$ en expliquant simplement que $(f_n)_n$ est bornée (confusion déjà signalée dans la question précédente, encore plus présente ici).

**4.** Le **(a)** sert uniquement à préparer à la question suivante, et a été en général bien traité, quoique quelques candidats n'y voient que la continuité. Le **(b)** ne pose pas de difficulté grâce à la question (indication ?) précédente.

**5.** La question a souvent été bien traitée par les candidats lorsqu'ils ont choisit se se ramener à un système de Van der Monde. Le résultat est classique et ne demande pas à être re-démontré, sauf si on ne reconnaît pas le système. Ceux qui ont choisi une démonstration par récurrence ont souvent du mal à écrire proprement l'hypothèse de récurrence : elle porte sur le nombre de complexes $\lambda_j$ deux à deux distincts et arbitraires, ces $\lambda_j$ sont donc amenés à être présents dans l'écriture de l'hypothèse. Lors de la dérivation des exponentielles, le $i$ est souvent oublié. Une très belle démonstration consiste à faire apparaître ces fonctions comme vecteurs propres pour l'endomorphisme de dérivation (ce qui rend la famille libre car associée à des valeurs propres distinctes). La principale difficulté consiste alors à se placer dans un espace où $f$
$mapstof'$ est réellement un endomorphisme.

**6.** Attention à ne pas lire trop rapidement la question, ce qui amènerait à procéder à un changement de variable qui n'aboutirait pas directement, la fonction $h$ étant supposée $T-$périodique et non $t-$périodique. On peut utiliser la relation de Chasles, un changement de variables,la périodicité, ou bien par exemple la dérivation. Certains ne modifient pas les bornes d'intégration lors d'un changement de variables, ou ne modifient pas l'intégrande. Rappelons que si l'on choisit la technique de dérivation, la condition $H' = 0$ implique $H$ constante que si on est sur un connexe (ici intervalle).

**7.** Cette question avait pour but d'aider les candidats à avoir une intuition de la condition attendue en **24(b)**, mais elle a été beaucoup moins réussie qu'attendu. Dans le **(a)**, peu de candidats pensent à se demander si les deux fonctions ont une période commune. Le **(b)** a été mieux réussi, mais on attend une explication claire de la conclusion. Quelques candidats trouvent que l'équation n'a aucune solution et en déduisent que la fonction n'est pas périodique ! Dans cette question, on a parfois vu que les conditions $\cos(x) = 1$ et $\cos(\alpha x) = 1$ impliquent que $x = 2k\pi$ et $\alpha x = 2k\pi$ avec le même entier relatif $k$. Le **(b)** permet de répondre immédiatement au **(c)** ; rappelons à cet effet que pour démontrer que l'ensemble n'est pas un s.e.v., il *suffit* de nier *une* propriété.

**8.** Dans le **(a)**, il ne faut pas oublier l'aspect sous-ensemble, qui est le moins trivial. Cela se fait par périodicité couplée à la continuité sur un compact $[0;T]$. Notons que la fonction cos n'est pas nécessairement $T-$périodique (pour un $T > 0$ fixé arbitraire), et que l'identité ne l'est jamais. Le début du **(b)** est basé sur le fait que la convergence uniforme (qui est celle en jeu ici) implique la convergence simple. Souvent les candidats ne font pas le début, mais connaissent l'énoncé qui permet de conclure. On a parfois vu une confusion entre les termes "complet" et "compact", et le jury a été surpris de lire que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ était un borné de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Un s.e.v. d'un e.v. n'est borné que dans une situation triviale, lorsque la topologie de l'e.v. ambiant est issue d'une norme. La confusion vient peut-être du fait que l'on travaillait avec un espace de fonctions bornées. Mais comme déjà signalé (avec des suites) dans la question **2**, le fait qu'un élément $f$ de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ soit borné signifie que $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ est fini, tandis $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ soit borné signifie que $\sup\limits_{f\in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{C})} \|f\|_\infty$ est fini. Enfin, pour montrer qu'une partie est un s.e.v., dans l'aspect non vide, *qu'il convient de ne pas oublier*, il est souvent facile de démontrer que l'élément neutre de l'addition (donc ici la fonction nulle) est dans la partie. La confusion semblait venir du fait que $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est un espace de *fonctions bornées*, ce qui ne rend pas l'espace lui-même borné.

**9.** Cette question se traite bien grâce à la question **6** et l'aspect borné des fonctions continues périodiques, mis à part l'implication **(A2)⇒(A3)** plus difficile et rarement vue. Cependant, elle n'a pas eu le succès escompté, parfois en raison de rédaction déficiente. Les hypothèses n'apparaissent pas clairement lorsqu'elles sont utilisées, quelques-uns utilisent l'assertion $Q$ comme prémisse pour démontrer directement que $P \Rightarrow Q$. Enfin, rappelons que si $F$ est une primitive de $f$, elle ne s'exprime pas nécessairement sous la forme $x$
$mapsto \int_a^x f(t)dt$ : la deuxième expression s'annule, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'une primitive. Certains tentent directement des équivalences, sans se rendre compte qu'à un moment (et parfois seulement à la conclusion) ils n'obtiennent qu'une implication.

**10.** Les candidats ayant abordé cette question ont souvent pensé à se ramener à un compact et à utiliser le théorème de Heine. Si l'on choisit un compact du type $[0, T]$, la conclusion sur $\mathbf{R}$ nécessite une argumentation en 0 et en $T$, puisque deux nombres réels $x, y$ satisfaisant $|x-y| \leqslant \eta$ n'ont aucune raison d'appartenir au même $[kT, (k+1)T]$.

**11.** Cette question est un grand classique, on introduit le noyau de Féjer, qui est une moyenne de Césaro du noyau de Dirichlet (celui qui est fourni par les sommes partielles de Fourier). Le fait que ce noyau soit positif fait bien fonctionner la convolution et on obtient la convergence uniforme des $(f_n)_n$ (qui sont donc des moyennes de Césaro des sommes partielles de Fourier) vers la fonction $f$. Le **(a)** se traite par un changement de variable puis par périodicité, à condition de bien préciser la fonction périodique en jeu (qui n'est pas le produit de $K_n$ par $f$, mais par $f(x-.)$). Le début du **(b)** a souvent donné des $j$ au dénominateur, sans que le candidat ne pense à traiter le cas $j=0$. Le jury a pu lire des expressions $\sin(j\pi)$ non simplifiées voire fausses. Certains candidats, qui ont trouvé 0 pour toute valeur de $j$ dans la première partie de la question, réussissent à transformer une somme de zéros en 1 sans isoler le $e_0$, ce qui n'est guère apprécié des correcteurs. Le **(c)** amène à des calculs non compliqués, mais qui doivent être menés avec soin. Cette question a été rarement menée à son terme. Certains tentent une récurrence, parfois menée avec succès. Le **(e)** demande beaucoup de soin. Il s'agit de bien découper l'intégrale (le découpage est suggéré par le début de la question), de constater que $K_n(t)$ est positif et donc sort des valeurs absolues, le reste apparaît alors souvent. La question suivante consiste en une interversion de somme ; on a parfois vu l'idée intéressante d'interprêter le terme de droite comme la série de Fourier de $K_n$, et donc de calculer les $\beta_{n,j}$ comme les coefficients de Fourier. Ce qui est fait dans ces questions permet d'arriver à la question **(g)**, puis le **(h)** se déduit facilement du **(g)** si l'on sait transformer une fonction $T-$périodique en une fonction $2\pi-$périodique. La convergence uniforme demandée dans la question **(g)** a rarement été réussie ; le plus simple est d'abord de constater que la majoration dans **(e)** est uniforme en $x$, puis, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, de choisir un $N$ à partir duquel $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. On a parfois vu des passages à la limite ; tant qu'on ne sait pas que la limite existe, la seule chose qui puisse être déduite est que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Un travail d'argumentation supplémentaire est nécessaire pour dire que cette limsup est nulle, et qu'il s'agit d'une vraie limite.

**12.** Le **(a)** est souvent correctement traité par ceux qui l'ont abordé, quoique la démonstration est la plupart du temps trop compliquée. Souvent, les candidats laissent le lecteur choisir les fonctions dans le **(b)** ; sur une question aussi facile, une rédaction incomplète sera nécessairement sanctionnée. Quoique guidé par ce qui précède, le **(c)** n'a pas souvent été correctement traité, parfois certains faisant comme hypothèse de récurrence que chaque fonction de la somme admet une limite. Pour le **(d)**, on attend autre chose qu'un seul mot, même si un argument court convaincant permet de répondre très rapidement.

**13.** Sauf exception, cette question n'a pas été abordée au delà du **(b)**. On notera que dans **(A5)**, l'alternative "soit" est après le "pour tout $j$", ce qui signifie que l'alternative ne porte pas sur le fait que tous les $P_j$ sont nuls ou tous les $\mu_j$ sont imaginaires purs affectés d'un polynôme $P_j$ constant, mais bien que pour chaque $j$ l'une des deux est vraie. Ces questions sont bien traitées par ceux qui ont compris l'alternative.

Les parties suivantes, on été très peu abordées, sauf ponctuellement quelques questions de début de partie.

**III.** Cette partie a été parfois abordée par quelques candidats. La question **16** est découpée, avec une partie **(c)** plus ardue.

**IV.** Souvent seulement le tout début a été abordé. Le **17** est assez intuitif mais il s'agit de correctement justifier le passage à la limite. Certains justifient l'existence de $a_\lambda$ en expliquant que $e_{-\lambda}f$ est p.p. par composition de $e_{-\lambda}$ et de $f$ grâce à la question **16**, malheureusement il s'agit là d'un mauvais emploi du terme composition. Ceux qui ont abordé la question **22** n'ont pas vu que le résultat découlait des questions **17**,de la linéarité et d'un calcul similaire à celui fait au début du **11(b)**. Le reste n'a pas été réellement abordé.

**V.** Cette partie permet d'exprimer ses compétences sur les équations différentielles. Les candidats l'ayant abordée ont surtout testé les questions **33** et début du **35**. Dans la question **33** (ou même **35(a)**), il était autorisé de rappeler sans démonstration l'expression des solutions puisqu'elles font partie d'un cours basique d'équations différentielles linéaires. Nánmoins, si le candidat choisit de faire une démonstration, le jury attend qu'elle soit menée en toute rigueur. Ainsi, si on choisit de résoudre $x' = ax$ par séparation (ce qui va exiger une division par $x(t)$), le candidat doit expliquer que les solutions ne s'annulent jamais (mis à part la solution nulle). Rappelons au passage que pour une fonction, être non nul est différent de ne jamais s'annuler (cf. sin). Parfois la (les) constante(s) intervi(enn)ent de manière incorrecte, voire est (sont) absente(s). Dans le **33(b)**, la discussion selon le signe de la partie réelle de $a$ n'a pas toujours été abordée. La question **35** a été largement préparée dans le **(a)**, et aussi dans le **(b)** pour ceux qui l'ont abordé, même s'il s'agit de correctement justifier la majoration de l'intégrale (ce qui exige que les bornes soient dans le bon sens), et si bien entendu il ne s'agit pas de diviser abusivement par $x(s)$, ni de multiplier des inégalités sans s'assurer du signe des termes par lesquels on multiplie (il fallait donc travailler sur la valeur absolue des termes, et non sur les termes).

### 3.2.3 Quelques éléments de correction

## – I. Préliminaires. –

**1.** Les fonctions $e_\lambda$ sont toutes continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par composition de $x$ $mapsto \lambda x$ avec l'exponentielle. Pour tout $x$ réel, $|e_1(x)| = |e^{ix}| = 1$, de sorte que la fonction $e_1$ est bornée. Ainsi, $e_1 \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Par ailleurs, $|e_{1+i}(x)| = |e^{i(1+i)x}| = e^{-x}$, donc en faisant tendre $x$ vers $-\infty$, nous constatons que $e_{1+i}$ n'est pas bornée ; ce n'est donc pas un élément de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

**2.** Lorsque $x$ est réel, le complexe $nx + i$ est de partie imaginaire égale à 1, donc il est non nul, ce qui justifie que $f_n$ est bien définie et continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$). Nous avons, pour $x$ non nul et $n \geqslant 1$ :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{(nx)^2 + 1}} \leqslant \frac{|x|}{|nx|} = \frac{1}{n},$$

la majoration étant encore valable si $x = 0$, ce qui justifie d'une part que chaque fonction $f_n$ est un élément de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et d'autre part que, pour tout $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$. Cette inégalité démontre que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers 0.

**3.** D'après le rappel, les fonctions $f$ et $g$ sont nécessairement continues bornées. Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \geqslant 1$ :

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) - (f(x) - f_n(x))g(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$