IV. Souvent seulement le tout début a été abordé. Le **17** est assez intuitif mais il s'agit de correctement justifier le passage à la limite. Certains justifient l'existence de a_λ en expliquant que $e_{-\lambda}f$ est p.p. par composition de $e_{-\lambda}$ et de f grâce à la question **16**, malheureusement il s'agit là d'un mauvais emploi du terme composition. Ceux qui ont abordé la question **22** n'ont pas vu que le résultat découlait des questions **17**,de la linéarité et d'un calcul similaire à celui fait au début du **11(b)**. Le reste n'a pas été réellement abordé.

V. Cette partie permet d'exprimer ses compétences sur les équations différentielles. Les candidats l'ayant abordée ont surtout testé les questions **33** et début du **35**. Dans la question **33** (ou même **35(a)**), il était autorisé de rappeler sans démonstration l'expression des solutions puisqu'elles font partie d'un cours basique d'équations différentielles linéaires. Nánmoins, si le candidat choisit de faire une démonstration, le jury attend qu'elle soit menée en toute rigueur. Ainsi, si on choisit de résoudre $x' = ax$ par séparation (ce qui va exiger une division par $x(t)$), le candidat doit expliquer que les solutions ne s'annulent jamais (mis à part la solution nulle). Rappelons au passage que pour une fonction, être non nul est différent de ne jamais s'annuler (cf. sin). Parfois la (les) constante(s) intervi(enn)ent de manière incorrecte, voire est (sont) absente(s). Dans le **33(b)**, la discussion selon le signe de la partie réelle de a n'a pas toujours été abordée. La question **35** a été largement préparée dans le **(a)**, et aussi dans le **(b)** pour ceux qui l'ont abordé, même s'il s'agit de correctement justifier la majoration de l'intégrale (ce qui exige que les bornes soient dans le bon sens), et si bien entendu il ne s'agit pas de diviser abusivement par $x(s)$, ni de multiplier des inégalités sans s'assurer du signe des termes par lesquels on multiplie (il fallait donc travailler sur la valeur absolue des termes, et non sur les termes).

3.2.3 Quelques éléments de correction

– I. Préliminaires. –

1. Les fonctions e_λ sont toutes continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par composition de x $mapsto \lambda x$ avec l'exponentielle. Pour tout x réel, $|e_1(x)| = |e^{ix}| = 1$, de sorte que la fonction e_1 est bornée. Ainsi, $e_1 \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Par ailleurs, $|e_{1+i}(x)| = |e^{i(1+i)x}| = e^{-x}$, donc en faisant tendre x vers $-\infty$, nous constatons que e_{1+i} n'est pas bornée ; ce n'est donc pas un élément de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.
2. Lorsque x est réel, le complexe $nx + i$ est de partie imaginaire égale à 1, donc il est non nul, ce qui justifie que f_n est bien définie et continue de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$). Nous avons, pour x non nul et $n \geqslant 1$:

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{(nx)^2 + 1}} \leqslant \frac{|x|}{|nx|} = \frac{1}{n},$$

la majoration étant encore valable si $x = 0$, ce qui justifie d'une part que chaque fonction f_n est un élément de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et d'autre part que, pour tout $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$. Cette inégalité démontre que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0.

3. D'après le rappel, les fonctions f et g sont nécessairement continues bornées. Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \geqslant 1$:

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) - (f(x) - f_n(x))g(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

De plus, puisque la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et que pour tout entier n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$, on en déduit que la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\geqslant 1}$ est majorée par une constante M (on peut également remarquer qu'elle converge vers $\|f\|_\infty$ pour conclure). Nous obtenons ainsi :

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leqslant M\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty,$$

et on conclut en constatant que le terme de droite tend vers 0.

4. **(a)** Il s'agit de l'uniforme continuité de la fonction f_n.

(b) On écrit, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ satisfaisant $|x_1 - x_2| \leqslant \eta_\varepsilon$:

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant |f(x_2)-f_n(x_2)|+|f_n(x_2)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)| \leqslant 2\|f-f_n\|_\infty+\varepsilon/3 \leqslant \varepsilon.$$

Ceci donne bien l'uniforme continuité de la fonction f.

5. Nous proposons deux démonstrations.

Première démonstration. Cet énoncé se démontre par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence au rang n, $H(n)$ est la suivante :

soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ tous distincts. Alors la famille $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est libre dans $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

Puisque la fonction exponentielle est non nulle, l'énoncé est vrai pour $n = 1$. S'il est vrai pour $n - 1$, supposons que l'on ait une relation $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$, en dérivant cette relation on obtient $i\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k e_{\lambda_k} = 0$, et donc par combinaison linéaire :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)e_{\lambda_k} = 0.$$

Dans cette relation, le terme pour $k = n$ est nul, l'hypothèse de récurrence permet donc d'obtenir que tous les $\alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)$, et donc tous les α_k, sont nuls lorsque $k \leqslant n-1$, puisque $\lambda_k \neq \lambda_n$ si $k < n$. Il ne reste donc qu'un seul terme, le coefficient devant est donc nécessairement nul.

Deuxième démonstration. Supposons que nous ayons une relation $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$. Les fonctions étant toutes de classe C^∞, on peut dériver autant de fois que nécessaire, et nous obtenons, en dérivant ℓ fois, après division par i^ℓ :

$$\forall \ell \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k^\ell e_{\lambda_k} = 0.$$

On évalue cette relation en 0, pour chaque $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, on obtient ainsi un système de Van der Monde dont il est connu que la matrice est inversible lorsque les λ_k sont deux à deux distincts.

– II. Quelques propriétés concernant les fonctions périodiques. –

6. Nous proposons deux démonstrations.

Première démonstration. Introduisons la fonction $H : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ d'expression $H(t) = \int_t^{T+t} h(s)ds = \int_0^{T+t} h(s)ds - \int_0^t h(s)ds$. La seconde forme montre que H est de classe C^1 puisque h est continue, puis que $H'(t) = h(t+T) - h(t)$. Or la fonction h étant $T-$périodique, il vient que $H' = 0$ sur l'intervalle $\mathbf{R}$, et donc que H est constante sur $\mathbf{R}$.

Deuxième démonstration. La relation de Chasles permet d'écrire que :

$$\int_t^{t+T} h(s)ds = \int_t^0 h(s)ds + \int_0^T h(s)ds + \int_T^{t+T} h(s)ds.$$

Dans la dernière intégrale, on pose $s = u+T$, puis on utilise la périodicité de h pour écrire que $h(u+T) = h(u)$. Il vient alors :

$$\int_T^{t+T} h(s)ds = \int_0^t h(u+T)du = \int_0^t h(u)du.$$

Reportant ceci dans l'expression précédente, en changeant la lettre muette u en s, le résultat s'ensuit.

7. **(a)** L'ensemble des périodes de la fonction cos est $2\pi\mathbf{Z}$, celui de la fonction t $mapsto \cos(\frac{p}{q}t)$ est $2\pi\frac{q}{p}\mathbf{Z}$, donc $2\pi q$ est une période commune aux deux fonctions, et donc une période de g_α.

(b) Puisque $\cos(t) \leqslant 1$ pour tout réel t, $g_\alpha(x) = 2$ équivaut aux deux assertions $\cos(x) = 1$ et $\cos(\alpha x) = 1$. La première équivaut à l'existence d'un $k \in \mathbf{Z}$ de sorte que $x = 2k\pi$ et la seconde à l'existence d'un $\ell \in \mathbf{Z}$ de sorte que $\alpha x = 2\ell\pi$. Bien entendu, $x = 0$ convient. Cherchons les autres solutions. Si x est une solution non nulle, alors k est non nul, et donc par division des relations, nous obtenons $\alpha = \frac{\ell}{k}$, ce qui signifie que α est rationnel, ce qui n'est pas. Ainsi, l'équation $g_\alpha(x) = 2$ a une solution et une seule, qui est 0, ce qui interdit la fonction g_α d'être périodique, car si elle admettait une période $T > 0$, nous aurions $g_\alpha(T) = g_\alpha(0) = 2$, et nous savons qu'il n'existe aucun nombre $T > 0$ satisfaisant cette relation.

(c) La question précédente démontre que $Per(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un s.e.v. de $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

8. **(a)** Tout d'abord, constatons que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est un sous ensemble de l'e.v. $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$; en effet, tout élément f de $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est borné sur $[0;T]$ par compacité de cet intervalle et continuité de f, puis la périodicité assure que $f(\mathbf{R}) = f([0;T])$, donc f est bien bornée sur $\mathbf{R}$. Par ailleurs, introduisons pour tout x réel la forme linéaire $\varphi_x : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ d'expression $\varphi_x(f) = f(x+T) - f(x)$. Dire que $f \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est $T-$périodique consiste à dire que $\varphi_x(f) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi :

$$C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C}) = \cap_{x\in\mathbf{R}} \mathrm{Ker}(\varphi_x),$$

de sorte que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est bien un s.e.v. comme intersection de s.e.v.

(b) Puisque $|\varphi_x(f)| \leqslant 2\|f\|_\infty$, on voit que les formes linéaires φ_x sont continues de sorte que leurs noyaux sont fermés comme images réciproques du fermé $\{0\}$ par des fonctions continues. Ainsi $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est fermé comme intersection de fermés (on peut vérifier également à la main que $C^0_T(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, en se souvenant que la convergence uniforme implique la convergence simple). Étant un fermé du complet $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, il est donc lui-même complet.

9. **(A1)** implique **(A2)** : en effet, si F est périodique, elle est bornée car continue (cf question **8(a)**). Démontrons que **(A2)** implique **(A3)**. Soit M un majorant de $|f|$. Par la relation de Chasles et la question **6**, nous avons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$F(nT) - F(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = n \int_0^T f(t)dt.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant \left| \int_0^T f(t)dt \right| \leqslant \frac{2M}{n},$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$. On démontre que **(A3)** implique **(A1)** en s'appuyant de nouveau sur la question **6**. Pour tout réel t, nous avons :

$$F(t+T) - F(t) = \int_t^{t+T} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds = 0,$$

ce qui conclut.

10. On remarque tout d'abord que f est continue sur le compact $K = [-1, T+1]$ donc elle y est uniformément continue en raison du théorème de Heine :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x,y) \in K^2, \quad (|x-y| \leqslant \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

Quitte à le diminuer, on peut supposer que δ est inférieur à 1. Soit désormais $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ satisfaisant $|x-y| \leqslant \delta$, introduisons k la partie entière de y/T, et posons enfin $x' = x - kT$ et $y' = y - kT$. Tout d'abord, nous avons $|x'-y'| = |x-y| \leqslant \delta$. De plus, par définition de k, nous avons $y' \in [0; T[$ donc $y' \in K$, et $|x'-y'| \leqslant \delta \leqslant 1$ de sorte que x' est minoré par $y'-1$, donc par -1, et majoré par $y'+1$, donc par $T+1$. Ainsi, $y' \in K$. Nous pouvons en conclure que :

$$|f(x') - f(y')| \leqslant \varepsilon.$$

On remarque enfin par la périodicité de f que $f(x') = f(x)$ et $f(y') = f(y)$, ce qui nous donne le résultat escompté.

N.B. : On peut également appliquer Heine sur $[0; T]$ et conclure par périodicité, en prenant soin de constater que si seul l'un des deux translatés est dans $[0; T]$, on aurait un coup d'inégalité triangulaire à appliquer en 0 ou en T.

11. **(a)** En posant $z = x - t$, puis en utilisant la question **6** (la fonction z $mapsto K_n(x-z)f(z)$ est $2\pi-$périodique), nous avons :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} K_n(z)f(x-z)dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(z)f(x-z)dz.$$

(b) Supposons en premier j non nul. Nous avons alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ijt}}{ij} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

et lorsque $j = 0$, on a $e_0 = 1$ d'où $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j = 1$. Par conséquent, en appliquant deux fois la linéarité de l'intégrale, nous obtenons d'abord que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-k}^{k} e_j \right)$ vaut 1, puis le résultat demandé.

(c) À l'aide des sommes de suites géométriques, en remarquant que e^{ix} est différent de 1, nous obtenons successivement :

$$\sum_{j=-k}^{k} e_j(x) = \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \frac{e^{(k+1)ix} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1}$$

puis

$$nK_n(x) = \frac{1}{e^{ix}-1}\left(e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} - \frac{1-e^{-inx}}{1-e^{-ix}}\right) = \frac{e^{ix}}{(e^{ix}-1)^2}(e^{inx}+e^{-inx}-2) = \frac{2\cos(nx)-2}{(2i\sin(x/2))^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(d) Le **(b)** permet de constater que $f(x) = f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt$, on conclut alors par **(a)** et la linéarité de l'intégrale.

(e) La question **10** assure que f est uniformément continue, ce qui donne la première partie. Ensuite, grâce au **(d)**, puis en notant que $K_n(t)$ est positif en vertu de **(c)**, nous obtenons :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt.$$

On découpe l'intégrale en deux morceaux, selon que $|t| < \eta_\varepsilon$ ou que $\eta_\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$. Pour la première intégrale, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\eta_\varepsilon} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\eta_\varepsilon} \varepsilon K_n(t)dt \leqslant \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\pi} K_n(t)dt = \varepsilon.$$

Pour la seconde, en remarquant que $\sin^2$ est strictement positive et croissante sur $[\eta_\varepsilon/2, \pi/2]$, nous avons, pour tout t satisfaisant $\eta_\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$:

$$K_n(t) \leqslant \frac{1}{n\sin^2(t/2)} \leqslant \frac{1}{n\sin^2(\eta_\varepsilon/2)}.$$

Le résultat s'ensuit, puisque $|f(x-t) - f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$.

Nous constatons que l'on en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$ pour tout n dépassant $\frac{4\|f\|_\infty}{\varepsilon\sin^2(\eta_\varepsilon/2)}$, de sorte que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f.

(f) Nous avons :

$$nK_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k} e_j = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} 1_{|j|\leqslant k}e_j = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1}\left[e_j\sum_{k=0}^{n-1} 1_{|j|\leqslant k}\right] = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1}(n-|j|)e_j,$$

d'où $\beta_{n,j} = 1 - \frac{|j|}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \{-(n-1), \ldots, n-1\}$.

(g) La question précédente démontre que chaque f_n est un polynôme trigonométrique généralisé. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Le **(e)** démontre en particulier que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\eta_\varepsilon/2)}.$$

On choisit un entier n_ε de sorte que $\frac{2\|f\|_\infty}{n_\varepsilon\sin^2(\eta_\varepsilon/2)} \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, nous avons $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. Ceci est bien la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers f

(h) Pour pouvoir appliquer le **(g)**, on se ramène à une fonction $2\pi-$périodique. On pose ainsi $f(x) = g\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$, ce qui définit une fonction continue $T-$périodique, à laquelle on associe la suite $(f_n))_{n\geqslant 1}$ qui converge uniformément vers elle. On pose ensuite $g_n(x) = f_n\left(\dfrac{2\pi}{T}x\right)$ pour chaque $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque x
$mapsto\dfrac{T}{2\pi}x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même, nous avons $\|g_n - g\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$, ce qui démontre que $(g_n)_n$ converge uniformément vers g. On explicite enfin g_n :

$$g_n(x) = f_n\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{|j|\leqslant n-1}\beta_{n,j}e_j\left(\frac{2\pi}{T}x - t\right)f(t)dt = \sum_{|j|\leqslant n-1}\left(\beta_{n,j}e_{2\pi j/T}(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e_j(-t)f(t)d\right.$$

Or :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e_j(-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e_j(-t)g\left(\frac{T}{2\pi}t\right)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e_{-\frac{2\pi j}{T}}(z)g(z)dz = c_j(g),$$

où l'on a posé $z = \dfrac{T}{2\pi}t$. Rassemblant, nous obtenons :

$$g_n = \sum_{|j|\leqslant n-1}\beta_{n,j}c_j(g)e_{\frac{2\pi}{T}j},$$

ce qui démontre que g_n est bien un polynôme trigonométrique, dont on a exprimé les coefficients en fonction des coefficients de Fourier de g.

12. **(a)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction périodique continue ayant une limite en $+\infty$, que l'on note ℓ. Soit $x \in \mathbf{R}$ arbitraire et $n \in \mathbf{N}^*$. La périodicité de f assure que $f(x) = f(x+nT)$, et en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $f(x) = \ell$, ce qui démontre que f est constante.

(b) Je note $g_j = f_j(.+T_{N+1}) - f_j$. D'une part, on remarque que g_j est T_j-périodique et d'autre part que $g = \sum_{j=1}^{N+1} g_j$. De plus, par $T_{N+1}-$périodicité de f_{N+1}, nous avons $g_{N+1} = 0$. Ainsi, g apparaît comme la somme des N fonctions périodiques g_j, pour $1 \leqslant j \leqslant N$.

(c) L'énoncé à démontrer par récurrence est vrai pour $N = 1$, en vertu du **(a)**. S'il est vrai au rang N, prenons une fonction f somme de N fonctions périodiques et ayant une limite ℓ en $+\infty$. On écrit $f = f_1 + \ldots + f_{N+1}$, et, avec les notations du **(b)**, la fonction g est somme de N fonctions continues prériodiques, et a pour limite $\ell - \ell = 0$ en $+\infty$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, g est constante et donc nulle. Cela signifie que f est en fait $T_{N+1}-$périodique, et puisqu'elle a une limite, l'hypothèse au rang 1 conclut que f est constante.

(d) Soit f une telle fonction. On définit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ d'expression $g(x) = f(-x)$. La fonction g est une somme finie de fonctions continues périodiques, et a la limite ℓ en $+\infty$. Le point précédent assure que g, et donc f, est constante.

13. **(a)** Soit p_0 la valeur de la constante. Nous avons pour tout réel t : $|\varphi_{\mu,P}(t)| = |P(t)| = |p_0|$.

(b) On commence par enlever les termes pour lesquels P_j est nul, ce qui ne change rien à la somme, puis on se retrouve avec une somme (finie) de termes tous bornés en raison du **(a)**. La somme est par conséquent bornée.

(c) i. Si Q est constant (non nul), il suffit de prendre par exemple $\varepsilon_0 = |Q(0)|/2$. Sinon, par la contraposée de la question **12**, Q étant une somme finie de fonctions périodiques et qui n'est pas nulle, elle ne tend donc pas vers 0 en $+\infty$, ce qui donne un $\varepsilon_1 > 0$ et une suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers $+\infty$ telle que $|Q(t_n)| \geqslant \varepsilon_1$. De même, il existe $\varepsilon_2 > 0$ et une suite $(t'_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers $-\infty$ telle que $|Q(t'_n)| \geqslant \varepsilon_2$. On pose enfin $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

ii. Commençons par le second cas. On décompose la somme de gauche avec les indices j variant de 1 à m, puis de $m+1$ à N. Nous avons tout d'abord :

$$\sum_{j=1}^{m} e^{\mu_j t} P_j(t) = e^{\alpha_1 t} \sum_{j=1}^{m} e^{i\beta_j t} P_j(t).$$

Soit N' le maximum des degrés de $P_1, \dots, P_m$, ce qui est un entier puisque les P_j sont supposés non nuls. On écrit $P_j(t) = \sum_{k=0}^{N'} \gamma_{j,k} t^k$, de sorte qu'au final :

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_{\mu_j, P_j}(t) = e^{\alpha_1 t} \sum_{k=0}^{N'} t^k Q_k(t),$$

où l'on a posé $Q_k(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{j,k} e^{i\beta_j t}$. Q_j est un polynôme trigonométrique (généralisé), et par définition de N', au moins un des $\gamma_{j,N'}$ est non nul ce qui assure que $Q_{N'}$ n'est pas nul. Passons à la dernière somme. Nous pouvons l'écrire sous la forme $e^{\alpha_1 t}\psi(t)$, avec :

$$\psi(t) = \sum_{j=m+1}^{N} e^{i\beta_j t} e^{(\alpha_j - \alpha_1)t} P_j(t).$$

Les $e^{i\beta_j t}$ sont de module 1, et puisque $\alpha_j - \alpha_1 < 0$, chaque terme de la somme tend vers 0 en $+\infty$. Dans le premier cas, on peut prendre en fait $\psi = 0$ et on fait le même raisonnement en remplaçant m par N.

iii. Le terme précédent peut s'écrire sous la forme $e^{\alpha_1 t} t^{N'}(Q_{N'}(t) + R(t))$ avec R qui tend vers 0 en $+\infty$. Supposons que $\alpha_1 > 0$, ou bien $\alpha_1 = 0$ et $N' > 0$, alors $e^{\alpha_1 t_n} t_n^{N'}$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, $|R(t_n)| \leqslant \varepsilon/2$, et donc $|Q_{N'}(t_n) + R(t_n)| \geqslant |Q_{N'}(t_n)| - |R(t_n)| \geqslant \varepsilon_0/2$ pour n assez grand, ce qui démontre que $\left|\sum_{j=1}^{N} \varphi_{\mu_j, P_j}(t_n)\right|$ tend vers $+\infty$ et donc n'est pas borné. Nécessairement il vient alors soit $\alpha_1 < 0$, soit $\alpha_1 = 0$ et $N' = 0$.

iv. Cette fois, on regroupe ensemble les (derniers) indices j pour lesquels $\alpha_j = \alpha_N$, et l'on regarde en $-\infty$. Un raisonnement analogue permet d'obtenir que $\alpha_N \geqslant 0$ (et même d'être plus précis, mais ce ne sera pas utile). Par conséquent, nous avons :

$$0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_N \geqslant 0,$$

ce qui démontre que tous les α_j sont nuls. Ensuite, on récupère $N' = 0$, et donc que tous les polynômes sont constants.

– III. Étude de PP et de ses éléments. –

14. (a) Puisque tout polynôme trigonométrique généralisé est dans $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$, toute limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés sera presque-périodique. Réciproquement, étant donné $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g \in Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$ telle que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon/2$. Alors il existe un entier $n \geqslant 1$ et n fonctions continues périodiques $g_1, \dots, g_n$ telles que $g = \sum_{j=1}^{n} g_j$. Appliquant la question **11** à chaque g_j, on trouve pour chaque j un polynôme trigonométrique généralisé Q_j tel que $\|g_j - Q_j\|_\infty \leqslant \varepsilon/(2n)$. Alors, en posant $Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j$, nous obtenons un polynôme trigonométrique généralisé pour lequel $\|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$, puisque :

$$\|f - Q\|_\infty \leqslant \|f - g\|_\infty + \|g - Q\|_\infty \leqslant \|f - g\|_\infty + \sum_{j=1}^{n} \|g_j - Q_j\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

(b) Passant à l'adhérence dans la relation entre espaces vectoriels $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \subset BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, nous obtenons que $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ est un s.e.v. fermé de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (l'adhérence d'un s.e.v. est bien un s.e.v.). Comme fermé d'un complet, il est alors complet.

15. f (resp. g) apparaît comme limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$). L'espace des polynômes trigonométriques généralisés étant stable par produit interne, $f_n g_n$ en est un pour chaque n. Alors la suite de polynômes trigonométriques généralisés $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers fg en vertu de la question **3**, d'où le résultat.

16. (a) On écrit $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors $\tilde{f} \circ \tilde{g} : x$

$mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (\tilde{g}(x))^k$. $\tilde{g}$ étant un élément de $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, e.v. stable par produit interne, on en déduit que $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ est également un élément de $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

(b) $\tilde{g}(\mathbf{R})$ est un borné, son adhérence est donc compacte. Prenons une suite de polynômes $(\tilde{f}_n)_n$ convergeant uniformément sur K vers f. Nous avons alors :

$$|\tilde{f}_n(\tilde{g}(x)) - f(\tilde{g}(x))| \leqslant \sup_{y \in K} |\tilde{f}_n(y) - f(y)|,$$

ce qui démontre, en passant au sup à gauche, que $(\tilde{f}_n \circ \tilde{g})_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $f \circ \tilde{g}$. En vertu du **(a)**, $\tilde{f}_n \circ \tilde{g}$ est un polynôme trigonométrique généralisé pour tout n, ce qui permet de conclure.

(c) La fonction g est bornée sur $\mathbf{R}$, on introduit $M = \|g\|_\infty + 1$ et $K_1 = [-M, M]$, qui est un compact de $\mathbf{R}$. En raison du théorème de Heine, sur ce compact f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $\delta_\varepsilon \in]0; 1[$ tel que pour tous $(u, v) \in K_1^2$, l'hypothèse $|u - v| \leqslant \delta_\varepsilon$ assure que $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$.
On peut alors trouver un polynôme trigonométrique g_ε tel que $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \delta_\varepsilon$. En vue d'appliquer le **(b)**, notons que l'on peut toujours supposer que g_ε est à valeurs réelles. En effet, si $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \delta_\varepsilon$, nous avons également $\|\bar{g} - \bar{g_\varepsilon}\|_\infty \leqslant \delta_\varepsilon$, et donc, en notant que $g = \bar{g}$, il vient :

$$\left\| g - \frac{1}{2}(g_\varepsilon + \bar{g_\varepsilon}) \right\|_\infty \leqslant \delta_\varepsilon.$$

Ainsi, $\frac{1}{2}(g_\varepsilon + \bar{g_\varepsilon})$ est un polynôme trigonométrique généralisé à valeurs réelles convenant, et quitte à remplacer dans ce qui suit g_ε par ce dernier, nous supposerons que g_ε est à valeurs réelles.
Soit x dans $\mathbf{R}$ arbitraire. On choisit $u = g(x)$ et $v = g_\varepsilon(x)$, qui sont bien des éléments de K_1, et l'on obtient $|f(g(x)) - f(g_\varepsilon(x))| \leqslant \varepsilon$, d'où $\|f \circ g - f \circ g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Par la question précédente, $f \circ g_\varepsilon$ est presque-périodique pour chaque $\varepsilon > 0$. Or, l'espace des telles fonctions presque-périodiques étant fermé, on peut en conclure que $f \circ g$ est presque-périodique.

– IV. Moyennes et coefficients de Fourier-Bohr. –

IV. A) Moyennes.

17. Soit $\tau > 0$ et N la partie entière de τ/T, et $\tau' = \tau - NT \in [0;T[$. Nous avons :

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right| = \left|\frac{1}{\tau}\int_0^{NT} f(t)dt + \frac{1}{\tau}\int_{NT}^{\tau} f(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{NT+\tau'}\int_0^{NT} f(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right| + \frac{1}{\tau}\int_{NT}^{\tau} |f(t)|dt \leqslant$$

$$\left|\frac{N}{NT+\tau'}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right| + \frac{\tau - NT}{\tau}\|f\|_\infty \leqslant \frac{|NT-(NT+\tau')|}{T(NT+\tau')}\int_0^T |f(t)|dt + \frac{T}{\tau}\|f\|_\infty \leqslant$$

$$\frac{\tau'}{\tau}\|f\|_\infty + \frac{T}{\tau}\|f\|_\infty \leqslant \frac{2T}{\tau}\|f\|_\infty.$$

Ceci démontre que $\mathcal{M}_\tau(f)$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ lorsque $\tau \to +\infty$.

18. Le début se déduit de la linéarité de l'intégrale et du passage à la limite (si existence des limites). $\mathcal{M}$ apparaît comme une limite simple d'une suite de formes linéaires, elle est donc linéaire (unicité de la limite). Enfin, nous avons pour tout $\tau > 0$:

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\tau}\tau\|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout τ, par continuité du module on peut passer à la limite à gauche pour obtenir que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1. La valeur 1 est atteinte par la fonction constante 1, il s'agit donc bien de sa norme.

19. (a) Nous avons :

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)| \leqslant |\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_\tau(f_n)| + |\mathcal{M}_\tau(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f_n)| + |\mathcal{M}_{\tau'}(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)|.$$

On conclut en constatant que

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_\tau(f_n)| = |\mathcal{M}_\tau(f - f_n)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$$

et la même relation avec le dernier terme.

(b) On choisit un indice n de sorte que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$. Puisque $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mathcal{M}_\tau(f_n)$ existe, on sait qu'il existe un $A_\varepsilon > 0$ de sorte que si $\tau, \tau' \geqslant A_\varepsilon$, nous aurons $|\mathcal{M}_\tau(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f_n)| \leqslant \varepsilon/3$. On conclut alors avec la relation du **(a)**.

(c) Il s'agit du critère de Cauchy au voisinage de $+\infty$, que nous redémontrons ici. Si on prend une suite $(\tau_n)_n$ de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$, la question précédente démontre que la suite $(\mathcal{M}_{\tau_n}(f))_n$ converge. A priori la limite dépend de la suite $(\tau_n)_n$, mais en fait il n'en n'est rien car si $(\tau'_n)_n$ est une autre telle suite, pour tout $\varepsilon > 0$ nous aurons $|\mathcal{M}_{\tau_n}(f) - \mathcal{M}_{\tau'_n}(f)| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang. On en conclut que la limite existe bien lorsque $\tau \to +\infty$.

20. Même argument que dans **18**.

IV. B) Coefficients de Fourier-Bohr.

21. Soit $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$; $e_{-\lambda} f$ est dans $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ comme produit de deux éléments de cet espace (cf question **15**), donc $a_\lambda(f)$ a bien un sens. De plus, en vertu de la question **20** :

$$|a_\lambda(f)| = |\mathcal{M}(e_{-\lambda} f)| \leqslant \mathcal{M}(|e_{-\lambda} f|) = \mathcal{M}(|f|) \leqslant \|f\|_\infty,$$

de sorte que f
$mapstoa_\lambda(f)$ est bien continue de norme inférieure ou égale à 1 (en fait, sa norme est 1, ce qui se voit par exemple avec $f = e_\lambda$, mais ce n'est pas demandé).

22. **(a)** $e_{-\lambda} f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_{\lambda_j - \lambda}$, or la fonction $e_{\lambda_j - \lambda}$ est périodique, de moyenne égale à 1 si $\lambda_j - \lambda = 0$ et de moyenne nulle sinon. Par conséquent $a_\lambda(f) = \alpha_j$ si $\lambda = \lambda_j$ et $a_\lambda(f) = 0$ si λ n'est aucun des λ_j.

(b) Nous avons

$$|f|^2 = \overline{f} f = \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j e_{\lambda_j}} f = \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j} e_{-\lambda_j} f,$$

de sorte que, à l'aide de la question précédente :

$$\mathcal{M}(|f|^2) = \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j} \alpha_j = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2.$$

23. **(a)** En utilisant la relation de Chasles puis la périodicité de f, nous avons :

$$\mathcal{M}_{NT}(e_{-\lambda} f) = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{T} e^{-i\lambda(x+jT)} f(x+jT)$$

$$\frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{-i\lambda jT} \int_0^T e^{-i\lambda x} f(x) dx \right) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda x} f(x) dx \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} \right).$$

(b) Lorsque $\lambda \notin \frac{2\pi}{T}\mathbf{Z}$, nous avons $e^{-i\lambda T} \neq 1$ de sorte que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{-i\lambda T})^j \right| = \left| \frac{1}{N} . \frac{1 - e^{-i\lambda NT}}{1 - e^{-i\lambda T}} \right| \leqslant \frac{2}{N 2 |\sin(\lambda T/2)|} = \frac{1}{N |\sin(\lambda T/2)|},$$

qui tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, ainsi $a_\lambda(f) = 0$.

Supposons maintenant que $\lambda = \frac{2\pi}{T} k$, pour un certain $k \in \mathbf{Z}$. Dans ce cas, $e^{-i\lambda T} = 1$, de sorte que $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} = 1$, et au final :

$$\mathcal{M}_{NT}(e_{-\lambda} f) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T} kx} f(x) dx = c_k(f).$$

24. **(a)** Par l'injectivité de Fourier, une fonction périodique continue non constante a au moins un coefficient de Fourier d'indice non nul distinct de 0.

(b) Si $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel, disons $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q}$, avec $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ alors les fonctions f_1 et f_2 ont toutes deux $qT_1 = pT_2$ comme période, il en est donc de même de la somme. Supposons désormais que le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ soit irrationnel. Puisque $\lambda_j \in \dfrac{2\pi}{T_j}\mathbf{Z}$, cela implique d'une part que le rapport $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est également irrationnel, mais aussi que $a_{\lambda_1}(f_2) = a_{\lambda_2}(f_1) = 0$. Par conséquent, $a_{\lambda_1}(f_1 + f_2) = a_{\lambda_1}(f_1) + a_{\lambda_1}(f_2) = a_{\lambda_1}(f_1) \neq 0$ et pour les mêmes raisons $a_{\lambda_2}(f_1 + f_2) \neq 0$. Si $f_1 + f_2$ avait une période non nulle T, nous aurions que chaque λ_j serait un élément de $\dfrac{2\pi}{T}\mathbf{Z}$, ce qui contredit l'irrationalité de leur rapport. Il ne reste alors que le cas où la somme serait constante, ce qui n'est pas possible puisque $a_{\lambda_2}(f_1 + f_2) \neq 0$ avec λ_2 non nul.

25. **(a)** Ceci provient de la continuité de la forme linéaire a_λ.

(b) Soit $\lambda \in \Lambda(f)$. On a $a_\lambda(f) \neq 0$ et donc, via la question précédente, $a_\lambda(f_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang, *i.e.* $\lambda \in \Lambda(f_n)$ à partir d'un certain rang.

(c) Chaque $\Lambda(f_n)$ est fini, donc $\Lambda(f)$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

26. Grâce à une intégration par parties, légitime car les fonctions f et $e_{-\lambda}$ sont de classe C^1, nous avons :

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-i\lambda x} f'(x)dx = \frac{1}{\tau}\left[e^{-i\lambda x} f(x)\right]_0^\tau + i\lambda\frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-i\lambda x} f(x)dx.$$

De plus, f étant presque-périodique, elle est bornée (cf. **14(b)**), et donc on peut écrire :

$$\frac{1}{\tau}\left|\left[e^{-i\lambda x} f(x)\right]_0^\tau\right| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{\tau},$$

de sorte que le terme tout intégré tend vers 0 lorsque $\tau \to +\infty$. Le passage à la limite donne alors le résultat.

27. **(a)** Puisque $|\alpha_n e_{\beta_n}(x)| = |\alpha_n|$, la série définissant f est normalement convergente, ce qui démontre au passage que f est continue (par convergence normale) et bornée. Soit $f_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e_{\beta_n}$. f_N est un polynôme trigonométrique généralisé, et nous avons pour tout réel x :

$$|f(x) - f_N(x)| \leqslant \sum_{n \geqslant N+1} |\alpha_n|.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$ puisque la série $\sum_n \alpha_n$ est absolument convergente. Ainsi, f est presque-périodique comme limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

(b) On constate tout d'abord que $a_\lambda(f_N)$ vaut α_n si $\lambda = \beta_n$ pour un $n \leqslant N$, et vaut 0 dans tous les autres cas. Or, $a_\lambda(f) = \lim_{N \to +\infty} a_\lambda(f_N)$, de sorte que ce terme vaut vaut α_n si $\lambda = \beta_n$ pour un $n \in \mathbf{N}$, et vaut 0 dans tous les autres cas. Ainsi $\Lambda(f) \subset \{\beta_n, n \in \mathbf{N}\}$ et il y a même égalité puisque tous les α_n sont supposés non nuls. De plus, nous avons obtenu que $a_{\beta_n}(f) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

IV. C) Relation de Parseval.

28. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est un polynôme trigonométrique généralisé. On écrit $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_{\lambda_j}$, et l'on note $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Nous avons $\mathcal{M}(f) = \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2$ en vertu de la question **22(b)**. Soit J une partie finie arbitraire de $\mathbf{R}$:

$$S_J(f) = \sum_{\lambda \in J} |a_\lambda(f)|^2 = \sum_{\lambda \in J \cap S} |a_\lambda(f)|^2 \leqslant \sum_{\lambda \in S} |a_\lambda(f)|^2,$$

le dernier terme étant atteint par exemple pour $J = S$. Or, grâce à **22(a)**, nous avons

$$\sum_{\lambda \in S} |a_\lambda(f)|^2 = \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2,$$

ce qui conclut.

29. **(a)** Puisque $(f_n)_n$ converge vers f, la continuité des formes linéaires a_λ et le fait que la somme soit finie permet de conclure.

(b) Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, $(\overline{f_n})_n$ converge uniformément vers $\overline{f}$, ce qui assure le résultat grâce à la question **3**.

(c) De la question précédente et de la continuité de $\mathcal{M}$, on en déduit que $(\mathcal{M}(|f_n|^2))_n$ converge vers $\mathcal{M}(|f|^2)$. Donc à partir d'un certain rang N_ε, nous avons $\mathcal{M}(|f_n|^2) \leqslant \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$. Or $S_J(f_n) \leqslant S(f_n)$, et $S(f_n)$ est égal à $\mathcal{M}(|f_n|^2)$ en vertu de **28**. Donc pour $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons bien $S_J(f_n) \leqslant \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$.

(d) La relation précédente étant vraie pour tout J et tout entier n assez grand, on peut faire tendre $n \to +\infty$, ce qui permet grâce à **(a)** d'obtenir que $S_J(f) \leqslant \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$ pour toute partie J. Ceci étant valable pour toute partie J, il vient $S(f) \leqslant \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$, puis il reste à faire tendre ε vers 0^+ pour conclure.

30. **(a)**

$$|f - P^*|^2 = |f|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{P^*} f) + |P^*|^2.$$

Or

$$\mathcal{M}(|P^*|^2) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} |a_\lambda(f)|^2.$$

De plus, $\overline{P^*} f = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \overline{a_\lambda(f)} e_{-\lambda} f$, de sorte que :

$$\mathcal{M}(\mathrm{Re}(\overline{P^*} f)) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \mathrm{Re}(\overline{a_\lambda(f)} \mathcal{M}(e_{-\lambda} f)) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \mathrm{Re}\left(|a_\lambda(f)|^2\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} |a_\lambda(f)|^2,$$

ce qui conclut.

(b) Nous avons, similairement à ce qui précède :

$$\left| f - \sum_{k=1}^{n} z_k e_{\mu_k} \right|^2 = |f|^2 + \left| \sum_{k=1}^{n} z_k e_{\mu_k} \right|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} e_{-\mu_k} f \right),$$

ce qui donne le résultat en passant aux moyennes et en remarquant que :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} a_{\mu_k}(f) \right) = \sum_{k=1}^{n} |z_k - a_{\mu_k}(f)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_{\mu_k}(f)|^2.$$

La valeur minimale est alors atteinte lorsque $z_k = a_{\mu_k}(f)$ pour tout k, et vaut :

$$\mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} |a_{\mu_k}(f)|^2.$$

(c) Notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ les éléments distincts de $\Lambda(P)$. P s'écrit alors sous la forme $\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_{\mu_j}$. Lorsque $\lambda \in \Lambda(P) \setminus \Lambda(f)$, nous avons $a_\lambda(f) = 0$. Lorsque $\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)$, disons $\lambda = \mu_j$ pour un certain j, nous avons $a_\lambda(f) = a_{\mu_j}(f)$. Par conséquent :

$$P^* = \sum_{\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)} a_\lambda(f) e_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(P)} a_\lambda(f) e_\lambda,$$

et

$$\mathcal{M}(|f - P|^2) = \psi_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}(\beta_1, \dots, \beta_n) \geqslant \psi_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}(a_{\mu_1}(f), \dots, a_{\mu_n}(f)) = \mathcal{M}\{|f - P^*|^2\}.$$

De ceci, on déduit que :

$$\mathcal{M}(|f - P^*|^2) \leqslant \mathcal{M}(|f - P|^2) \leqslant \|f - P\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

c'est-à-dire grâce au **(a)** que :

$$\mathcal{M}(|f|^2) \leqslant \left(\sum_{\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)} |a_\lambda(f)|^2 \right) + \varepsilon^2 \leqslant S(f) + \varepsilon^2.$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0.

31. Il s'agit simplement de combiner les résultats des deux questions précédentes.

32. On peut prendre par exemple la fonction f d'expression :

$$f = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}} e_{1/n}.$$

Nous sommes dans les conditions d'applications de la question **27**, avec $\alpha_n = 1/n^{3/2}$ et $\beta_n = 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$, en effet la série $\sum_{n \geqslant 1} 1/n^{3/2}$ est (absolument) convergente (critère de Riemann avec $3/2 > 1$). Nous avons alors une fonction presque-périodique, avec $\Lambda(f) = \{1/n, n \geqslant 1\}$ et $a_{1/n}(f) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Sa moyenne est égale à $a_0(f)$, donc à 0. Soit F la primitive de f de moyenne nulle, démontrons qu'elle n'est pas p.p., dans ce cas aucune primitive ne le sera. Nous avons $a_0(F) = 0$ puisqu'elle est de moyenne nulle, et grâce à la question **26**, $a_\lambda(F) = \dfrac{a_\lambda(f)}{i\lambda}$, de sorte que $\Lambda(F) = \{1/n, n \geqslant 1\}$ et $a_{1/n}(F) = \dfrac{1}{i\sqrt{n}}$. Si F est p.p., la série $\sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |a_\lambda(F)|^2$ converge, ce qui est faux, puisque :

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |a_\lambda(F)|^2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Donc les primitives de f ne sont pas presque-périodiques.

– V. Solutions bornées d'équations différentielles. –

V. A) Solutions bornées d'équations différentielles autonomes.

33. **(a)** Les solutions de $x' = ax$ sont les fonctions $x : t$ $mapstox_0 e^{at}$. Dans notre cas, $a = i\mu$ avec $\mu \in \mathbf{R}$, donc $|x(t)| = |x_0|$, de sorte que la fonction x est bien bornée.

(b) Supposons $x_0 \neq 0$. $|x_0 e^{at}| = |x_0| e^{\mathrm{Re}(a)t}$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$ (resp. lorsque $t \to -\infty$) si $\mathrm{Re}(a) > 0$ (resp. $\mathrm{Re}(a) < 0$). Donc si $\mathrm{Re}(a) \neq 0$, aucune solution autre que la solution nulle n'est bornée.

34. **(a)** Soit f l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique. f laisse stable $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k id)$, on peut donc considérer la restriction f_k de f à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k id)$, qui définit un endomorphisme de cet espace. Par définition de C_k, l'endomorphisme $f_k - \lambda_k id_{C_k}$ est nilpotent d'indice au plus égal à n_k. On peut donc trouver une base dans laquelle f sera représentée par une matrice Δ diagonale par blocs, les blocs étant des $\Delta_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$, avec N_k nilpotente d'indice au plus n_k. Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée. Nous avons $X(t) = P \exp(t\Delta) P^{-1} X(0)$, avec $\exp(t\Delta)$ matrice diagonale par blocs, de blocs $\exp(t\Delta_k) = e^{t\lambda_k} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{1}{\ell!} N_j^{\ell}$, puisque N_k est nilpotente et commute avec I_{n_j}. Ainsi, chaque composante sera une combinaison linéaire de termes de la forme ϕ_{λ_k, P_k} (pour $k \in \{1, \dots, r\}$), où chaque P_k est un polynôme de degré au plus $n_k - 1$, et donc une somme de tels termes en rentrant les constantes multiplicatives dans l'expression de P_k.

(b) S'il existe une valeur propre λ de partie réelle nulle, donnons nous X_0 un vecteur propre associé à cette valeur propre. La fonction $\phi : t$ $mapstoe^{t\lambda} X_0$ est une solution, puisque $\phi'(t) = \lambda\phi(t)$ et

$$A\phi(t) = e^{t\lambda} A X_0 = e^{t\lambda} \lambda X_0 = \lambda\phi(t) = \phi'(t).$$

De plus, les composantes de ϕ sont bornées, car majorées par $\|\phi(t)\| = \|X_0\|$, donc la fonction est elle-même bornée, et non nulle. Il est donc nécessaire que toutes les valeurs propres soient de partie réelle non nulle. Si cette condition est satisfaite, les composantes non nulles d'une solution sont des sommes de termes de la forme $\varphi_{P,\lambda}$ avec P non nul et λ de partie réelle non nulle. L'assertion **(A4)** de la question **13** étant alors fausse, il en est de même de l'assertion **(A5)**, ainsi toute composante non nulle sera non bornée. Par conséquent, toute solution non nulle est non bornée. La CNS est donc qu'aucune valeur propre soit de partie réelle nulle.

(c) Par le **(a)**, chaque composante de la solution est de la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \varphi_{\lambda_j, P_j}$. Toute solution bornée a ses composantes bornées, donc le fait que **(A5)** implique **(A4)** permet de dire que dans l'expression $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \varphi_{\lambda_j, P_j}$ d'une composante, λ_j est un imaginaire pur (donc de la forme $i\mu_j$ avec μ_j réel) et P_j est constant. Écrivons λ_j sous la forme $i\mu_j$, avec μ_j réel, et notons c_j la constante valeur du polynôme P_j. Finalement cette composante s'écrit donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} c_j e_{\mu_j}$, ce qui est bien un polynôme trigonométrique généralisé.

V. B) Équations exponentiellement stables.

35. **(a)** Elles sont de la forme $x : t$
$mapsto \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) x_0$, avec $x_0 \in \mathbf{C}$.

(b) Nous avons :

$$|x(t)| = |x(s)|.\left|\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)\right| = |x(s)|\exp\left(\mathrm{Re}\left(\int_s^t a(u)du\right)\right) = |x(s)|\exp\left(\int_s^t \mathrm{Re}(a(u))du\right).$$

Posons $S = \sup_{u\in\mathbf{R}} \mathrm{Re}(a(u))$, qui est strictement négatif par hypothèse. Prenons s, t deux réels avec $t > s$. Puisque $s < t$ et que $\mathrm{Re}(a(u)) \leqslant S$, par intégration nous avons

$$\int_s^t \mathrm{Re}(a(u))du \leqslant \int_s^t S du \leqslant S(t-s).$$

On utilise ensuite la croissance de l'exponentielle puis que $|x(s)| \geqslant 0$ pour obtenir :

$$|x(t)| \leqslant |x(s)|\exp(S(t-s)).$$

On peut donc prendre $M = 1$ et $\alpha = -S$ qui est bien strictement positif.

(c) Soit $b = a - \mathcal{M}\{a\}$. Alors b est $T-$périodique. De plus, ses primitives sont bornées en raison de la question **9** puisque :

$$\int_0^T (a(s) - \mathcal{M}\{a\})ds = \left(\int_0^T a(s)ds\right) - T\mathcal{M}\{a\} = 0.$$

Les primitives de b étant bornées, il en est de même de celles de u
$mapsto \mathrm{Re}(b(u))$. Introduisons alors le réel $C = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\int_0^x \mathrm{Re}(b(u))du\right|$. Par la relation de Chasles, nous avons pour tous $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $\left|\int_s^t \mathrm{Re}(b(u))du\right| \leqslant 2C$. De plus, $|x(t)| = |x(s)|\exp\left(\int_s^t \mathrm{Re}(a(u))du\right)$. On en déduit, en tenant compte du fait que $s < t$:

$$\int_s^t \mathrm{Re}(a(u))du = \int_s^t (\mathrm{Re}(b(u)) + \mathrm{Re}(\mathcal{M}\{a\}))du = \left(\int_s^t \mathrm{Re}(b(u))du\right) + \mathrm{Re}(\mathcal{M}\{a\})(t-s) \leqslant 2C + \mathrm{Re}(\mathcal{M}\{a\})$$

Finalement :

$$|x(t)| \leqslant e^{2C} e^{\mathrm{Re}(\mathcal{M}\{a\})(t-s)}|x(s)|,$$

et donc nous avons l'hypothèse avec $M = e^{2C}$ et $\alpha = -\mathrm{Re}(\mathcal{M}\{a\})$.

36. Les solutions de $X' = AX$ sont de la forme $X(t) = \exp((t-s)A)X(s)$. Supposons $t > s$:

$$\|X(t)\| = \|\exp((t-s)A)X(s)\| \leqslant \|\exp((t-s)A)\|_{\mathcal{M}}\|X(s)\| \leqslant Ce^{-\alpha(t-s)}\|X(s)\|$$

avec les notations de l'énoncé, ce qui donne le résultat.

37. **(a)** La fonction nulle étant solution, l'unicité dans Cauchy-Lipschitz linéaire assure que toute solution non nulle en un point ne s'annule jamais. Pour $t > 0$ nous avons :

$$\|X(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}\|X(0)\|,$$

et donc $\lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$. Pour $t < 0$ nous avons :

$$\|X(0)\| \leqslant Me^{\alpha t}\|X(t)\|,$$

et donc
$$\|X(t)\| \geqslant M^{-1}e^{-\alpha t}\|X(0)\|,$$
ce qui démontre que $\lim_{t\to-\infty}\|X(t)\| = +\infty$. En particulier cette solution n'est pas bornée (ce qui est utile pour la question suivante).

(b) Supposons que l'on ait deux solutions bornées X_1 et X_2. Alors $X = X_2 - X_1$ est une solution bornée de l'équation homogène, elle est donc nulle en vertu de ce qui précède, d'où $X_1 = X_2$.

38. (a) Tout d'abord, nous avons :
$$\|\exp((t-s)A)B(s)\| \leqslant Ce^{-\alpha(t-s)}\|B(s)\| \leqslant Ce^{-\alpha(t-s)}\|B\|_\infty,$$
et l'intégrale $\int_{-\infty}^t Ce^{-\alpha(t-s)}\|B\|_\infty ds$ converge (sa valeur est $\frac{C\|B\|_\infty}{\alpha}$), donc chacune des composantes $\exp((t-s)A)B(s)$ est en valeur absolue majorée par $\|\exp((t-s)A)B(s)\|$, et définit par conséquent une intégrale (absolument) convergente, l'expression a donc un sens. De plus :
$$\|X_B(t)\| \leqslant \frac{C\|B\|_\infty}{\alpha}.$$
Par ailleurs, on peut écrire :
$$X_B(t) = \exp(tA)\int_{-\infty}^t \exp(-sA)B(s)ds$$
ce qui donne que X_B est dérivable par produit, de dérivée :
$$X_B'(t) = A\exp(tA)\int_{-\infty}^t \exp(-sA)B(s)ds + \exp(tA)\exp(-tA)B(t) = AX_B(t) + B(t).$$
Le résultat est donc démontré.

(b) On propose $y_B(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left(\int_s^t a(u)du\right)B(s)ds$. L'hypothèse (ES) assure que pour $s < t$, nous avons :
$$\int_s^t a(u)du \leqslant Me^{-\alpha(t-s)},$$
puisque t
mapsto $\int_s^t a(u)du$ est la solution du système homogène valant 1 au point s. De ce fait, on peut reproduire le raisonnement de la question précédente, ce qui démontre que $y_B(t)$ a un sens pour tout t, que la fonction y_B est bornée (par exemple par la constante $\frac{M\|B\|_\infty}{\alpha}$, et que y_B est solution.

39. A et B étant $T-$périodiques, si X est la solution bornée, on vérifie que $X(.+T)$ est également solution :
$$(X(t+T))' = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) + B(t+T) = A(t)X(t+T) + B(t).$$
Nous avons donc deux solutions bornées, ce qui assure par l'unicité des solutions bornées que $X(.+T) = X$, c'est-à-dire que X admet T pour période.

40. L'existence et l'unicité des solutions bornées à $X' = AX + B(t)$ pour toute B bornée est assurée par les questions **37(b)** et **38(a)**.

La question **39** assure que si B est périodique, il en est de même de X_B.

Supposons maintenant que $B \in VectPer(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$, et $B_1, \ldots, B_p$ les composantes de B. Nous avons $B = \sum_{i=1}^{p} B_i \varepsilon_i$. De plus, chaque B_i s'écrit comme somme finie de fonctions périodiques : $B_i = \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ avec $h_{i,j} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est périodique. Au final, B est une somme finie de fonctions $h_{i,j}\varepsilon_i : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ toutes périodiques, nommons-les $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_k$. Chaque solution bornée Y_j de $X' = AX + \tilde{B}_j(t)$ est donc périodique (question **39**), et par linéarité du système et unicité de la solution bornée, X_B est égale à $\sum_{j=1}^{k} Y_j$, ce qui démontre que $X_B \in VectPer(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$.

Soit enfin $B \in PP(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$. Chaque composante de B est une limite uniforme d'une suite d'éléments de $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$, B est donc limite d'une suite $(B_n)_n$ d'éléments de $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C})))$, de sorte que $X_{B_j} \in VectPer(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ pour tout j en vertu de ce qui précède. Le calcul fait en **38(a)** démontre que :

$$\|X_B - X_{B_n}\|_\infty \leqslant \frac{C}{\alpha} \|B - B_n\|_\infty,$$

ce qui démontre que $B \in PP(\mathbf{R}, \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$.