mathématiques.
Il convient notamment de rappeler que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques et qu'il est incorrect de les utiliser comme des abréviations.
Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/21-ep1.pdf

3.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

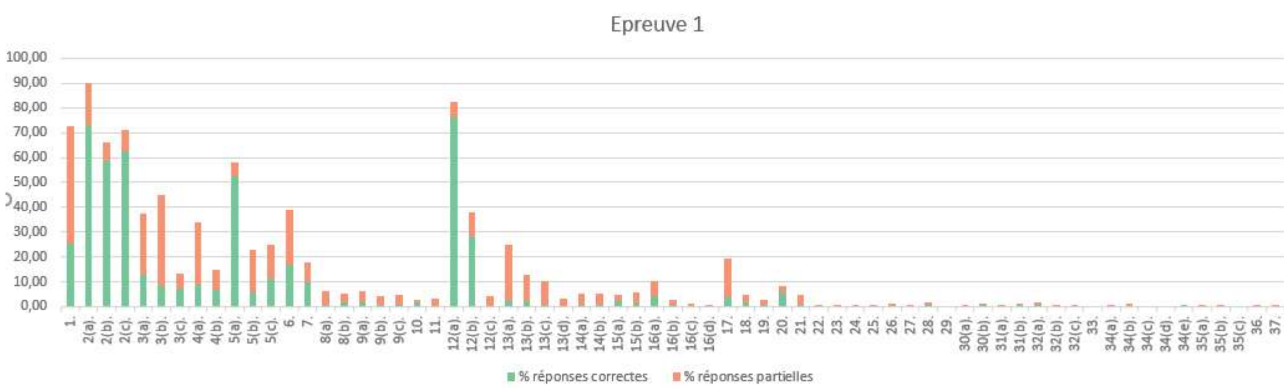

Figure 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste.

3.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

1. **Présentation du sujet**

   Le sujet de mathématiques 1 proposé cette année est constitué de 6 parties et porte sur l'algèbre générale et l'algèbre linéaire au programme de l'agrégation interne de mathématiques.

   La première partie, très proche du cours, permet aux candidats de montrer leur maîtrise des bases de l'algèbre linéaire.

   La seconde partie propose une preuve d'un théorème de Burnside sur les sous-algèbres irréductibles d'endomorphismes par une méthode faisant essentiellement manipuler les matrices par blocs. Cette partie demande davantage de recul. Cependant, comme indiqué dans l'énoncé, en admettant le résultat démontré dans cette partie, les quatre parties suivantes peuvent être abordées de manière indépendante.

   La troisième partie propose d'examiner la pertinence des hypothèses du théorème de Burnside sur deux exemples en dimension 3. Elle fait appel à quelques résultats sur les polynômes à coefficients rationnels, la structure de corps et l'arithmétique des entiers.

La quatrième partie illustre l'application du théorème de Burnside à trois résultats sur des sous-groupes du groupe linéaire (le groupe unitaire, un groupe borné et un résultat de co-réduction dû à Kolchin).

La cinquième partie porte sur les matrices magiques, les matrices de permutation et leur lien.

La sixième partie fait établir avec des arguments de passage au quotient un lemme de co-trigonalisation qui, combiné au théorème de Burnside de la partie 2, permet de disposer d'un outil efficace de preuve de co-trigonalisabilité. Une des applications proposées est ensuite le théorème de Mc Coy.

2. Remarques d'ordre général

Nombreux sont les candidats qui ont abordé relativement peu de questions.

Certaines points très classiques (essentiellement des questions de cours) n'ont pas rencontré le succès que l'on espérait.

Les réponses aux questions d'algèbre linéaire, même proches du cours, sont souvent très laborieuses et les démonstrations échouent parfois.

Les problèmes d'existence et d'unicité ne sont pas toujours clairement identifiés. Rappelons que l'unicité d'une étape de la construction d'un objet n'en prouve pas l'unicité.

D'une manière générale, la rédaction laisse souvent à désirer. Pas assez précise, pas assez explicite, elle figure sur la copie comme si on laissait au correcteur le soin de finir le raisonnement. Ce n'est pas ce qui est attendu.

3. Remarques question par question

Q1 Très peu de preuves correctes pour cette question de cours. On trouve dans les preuves proposées des égalités fausses du type $tr(A^p) = (trA)^p$, ou $tr(A^p) = p(trA)$. Les affirmations vagues comme "la trace est la somme des valeurs propres" ne sont pas recevables en l'état. Des précisions sont attendues sur le corps de base et sur les multiplicités en jeu.

Q2a Question bien résolue. Le cas de trois matrices ne demande pas une preuve indépendante, ce qui a été bien vu en général.

Q2b Question bien résolue. Une erreur parfois rencontrée concerne l'égalité de deux objets de types différents : une matrice égale à un scalaire, souvent le symbole de Kronecker de l'énoncé.

Q2c Il s'agissait ici de fournir un exemple de trois matrices pour lesquelles les traces demandées étaient différentes Attention donc à ne pas invoquer des considérations très générales ou vagues sur des objets "pas forcément égaux" .

Q3a Très peu de candidats rédigent correctement la preuve de l'existence et de l'unicité. On note une utilisation fausse du théorème de représentation de Riesz sur les formes linéaires dans un espace muni d'un produit scalaire, ce qui n'est pas le cas de la forme bilinéaire qui à A et B associe $tr(AB)$. Attention en outre à l'orthographe du mot "existence" !

Q3b Peu de candidats ont abordé cette question. La base préduale n'est en général pas invoquée. La question est rarement traitée correctement et dans son intégralité quand elle est abordée.

Q3c Question peu abordée. Beaucoup de tentatives échouent, souvent noyées dans les calculs utilisant les matrices élémentaires.

Q4a Étonnamment, peu de candidats réussissent cette question qui semble pourtant accessible. Les points importants de la preuve (une sous-algèbre est un sous-espace vectoriel, un groupe contient l'élément neutre et est stable par produit) sont rarement mis en valeur.

Q4b Question peu et mal traitée. Les candidats sont nombreux à ignorer que les éléments de G fournissent une famille génératrice de Vect(G). Le théorème de la " base extraite" est méconnu. Rappelons en outre que groupe linéaire $GL_n(\mathbf{K})$ n'est pas un espace vectoriel.

Q5a Question de cours bien faite en général.

Q5b Question de cours souvent mal rédigée et très rarement correcte. Beaucoup de preuves fausses "en prenant certains vecteurs propres" . Rappelons que si F est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel de dimension finie, l'assertion "de toute base de E on peut extraire une base de F" est fausse. L'exemple d'une droite dans le plan fournit un contre-exemple immédiat. L'usage d'un polynôme annulateur scindé à racines simples pour caractériser la diagonalisabilité semble méconnu.

Q5c Question bien faite en général. On note quelques confusions entre sous-espace stable et ensemble des vecteurs invariants (sous-espace propre pour la valeur propre 1). Une autre erreur courante consiste à considérer que toute base de vecteurs propres pour f est également base de vecteurs propres pour g.

Q6 Question correctement abordée, même si beaucoup de candidats oublient la réciproque (élémentaire, mais néanmoins à mentionner) ou omettent de préciser qu'un endomorphisme admet au moins une valeur propre car le corps de base est algébriquement clos (ici $\mathbf{C}$).

Q7 On regrette ici très souvent un manque de clarté sur les objets manipulées. De quels objets parle-t-on dans cette question ?

Q8a Question parfois abordée. Dans les copies où elle l'est, le calcul par blocs pose problème. En général, la matrice (par blocs) proposée est fausse. Une erreur très souvent rencontrée est la suivante : un élément de $L(E^n)$ est traité spontanément comme étant nécessairement du type $(v_1, .., v_n) \mapsto (g_1(v_1), ..., g_n(v_n))$ avec les g_i des endomorphismes de E.

Q8b et 9a Questions peu abordées.

Q9b Une erreur courante est de considérer que l'intersection d'un sous-espace avec une somme directe est la somme directe des intersections de ce sous-espace avec les facteurs de la somme directe. Il suffit par exemple de considérer une droite qui n'est contenue dans aucun des facteurs de la somme directe. En outre, signalons qu'un sous-espace d'un produit cartésien n'est pas nécessairement un produit de sous-espaces des espaces qui constituent le produit. Il suffit par exemple de considérer la première bissectrice dans $\mathbf{R}^2$.

Q9c, 10 et 11 Questions peu abordées.

Q12a Question bien résolue dans la majorité des cas.

Q12b Question abordée de manière inégale. Beaucoup de candidats concluent prématurément, sans argument véritablement convaincant. Les calculs sont en outre assez souvent laborieux. l'utilisation pertinente d'arguments sur la dimension est rare.

Q12c Certains semblent penser que si aucune des droites engendrées par les vecteurs de la base canonique n'est stable, alors il n'existe aucune droite stable. Il y a en effet bien d'autres droites dans l'espace $\mathbf{C}^3$. On retrouve ici parfois la confusion entre sous-espace stable et sous-espace propre pour la valeur propre 1.

Q13a La rédaction de cette question classique est en général trop succincte. Le candidat doit expliquer pourquoi il est suffisant que le polynôme de degré 3 n'admette aucune racine rationnelle pour pouvoir conclure que le polynôme est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Cette confusion entre l'irréductibilité et l'existence de racines est très courante, trop de candidats considérant qu'un polynôme est irréductible si et seulement si il est sans racines, quel que soit le contexte. Signalons enfin que le fait que p et q soient premiers entre eux n'est pas contradictoire avec le fait que q divise p. Il suffit de considérer le cas $q = 1$.

Q13b Le théorème de Cayley-Hamilton est rarement utilisé. Certains candidats écrivent qu'une base est (id, u, u^3), alors qu'un minimum d'observation permet de s'apercevoir que c'est faux. l'espace vectoriel étudié ici est parfois l'objet de confusions sur la nature des objets manipulés.

Q13c Trop de candidats semblent considérer que si u est inversible alors tout élément de A l'est aussi. On rappelle également que dans un corps, tous les éléments non nuls sont inversibles.

Q13d On a observé de nombreux mélanges entre les matrices et l'espace sur lequel elles agissent.

Q14a Attention aux erreurs facilement évitables ! Certains candidats expriment U à l'aide de l'inverse de X, ce qui n'a guère de sens, X étant une matrice non carrée.

Q14b et 15a Questions peu abordées.

Q15b Cette question a été bien résolue.

Q16a Cette question est en général bien faite, même si l'aspect algébriquement clos du corps de base est parfois passé sous silence.

Q16b Le produit de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nécessairement nilpotent.

Q16c et d Questions peu abordées.

Q17 Cette question est bien faite en général.

Q18 La dimension est souvent devinée et assez rarement prouvée.

Q19 Question très peu abordée.

Q20 et 21 Questions correctement résolues quand elles sont abordées.

Q22 à 37 Questions abordées de manière très peu significative.

3.1.3 Quelques éléments de correction

Préliminaires

1. Soit A un élément nilpotent de $M_n(\mathbf{K})$, c'est à dire pour lequel il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p = 0$. Quelle est sa trace ?

Éléments de solution

Le polynôme caractéristique de A est X^n. Sa trace est donc nulle (coefficient lié à X^{n-1}). Toute autre caractérisation des matrices nilpotentes est recevable.

2. Soient A, B, C trois éléments de $M_n(\mathbf{K})$.

(a) Démontrer que $tr(AB) = tr(BA)$ et $tr(ABC) = tr(CAB)$.

Éléments de solution

En notant $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ on calcule

$$tr(AB) = \sum_{i,k} a_{i,k} b_{k,i} = tr(BA).$$

Il suffit en suite d'appliquer cela à AB et C.

(b) Soient i, j, k, l quatre entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$. Donner sans démonstration ce que vaut le produit $E_{i,j}E_{k,l}$. On utilisera le symbole de Kronecker.

Éléments de solution

Il est connu que, utilisant le symbole de Kronecker,

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

(c) Démontrer que pour $n \geqslant 2$, il peut arriver que $tr(ABC) \neq tr(CBA)$.

Éléments de solution

Il suffit de prendre $A = E_{1,1}, B = E_{1,2}$ et $C = E_{2,1}$. Dans ce cas, $ABC = E_{1,1}$ et la trace vaut 1. Par ailleurs, $CBA = 0$ et la trace est nulle.

3. Les formes linéaires sur $M_n(\mathbf{K})$.