3.2.1 Présentation du sujet

Le sujet a pour objectif principal l'étude de la différentiabilité de l'application distance à un fermé en dimension finie, avec notamment le fait qu'à l'extérieur, l'application est différentiable en x si et seulement si $d(x, F)$ est atteinte en un unique point du fermé.
Le sujet est progressif et commence par des résultats classiques sur cette distance et sur la projection sur un convexe fermé.
On étudie ensuite la dimension 1, d'abord sur des exemples, puis de manière plus générale, en utilisant la structure des ouverts de $\mathbb{R}$.
On étudie ensuite des exemples en dimension n, avant de traiter le cœur du problème dans les parties 5 et 6. Ces parties sont plus délicates. Les exemples permettent également d'étudier le problème sur le bord de la partie.

3.2.2 Remarques générales

Le sujet est un problème de calcul différentiel, mais couvre une partie importante du programme d'analyse. La majeure partie des candidats traite principalement les deux premières parties.

3.2.3 Commentaires par questions

Partie I

1. La borne inférieure n'est pas atteinte a priori (c'est l'objet de la question 3). Beaucoup de candidats proposent des démonstrations fausses consistant à écrire :
   « $d_F(x) = 0 \iff \inf\limits_{f \in F} ||x - f|| = 0 \iff ||x - f|| = 0$ ». À ce stade du problème, la proposition $\forall x \in E,\ d_F(x) = 0 \iff x \in \overline{F}$ doit être démontrée. S'il l'on a montré que, pour tout vecteur f de F, $||x - f|| > \varepsilon$, alors on ne peut qu'en déduire que $d(x, F) \geqslant \varepsilon$ (on perd l'inégalité stricte a priori. La conservation de l'inégalité stricte demanderait une justification soigneuse). Si $d(x, F) = 0$, il est faux d'affirmer que toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de points de F converge vers x.

2. (a) On ne peut pas utiliser le fait que la borne inférieure est atteinte, puisqu'il s'agit de l'objet de la question 3. La borne inférieure n'est pas *le plus petit* des minorants (qui n'existe pas !). La définition de fonction lipschitzienne n'est pas toujours connue.
   En général, il est faux d'écrire que $\inf\limits_{x \in A}(f(x) + g(x)) \leqslant \inf\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{x \in A} g(x)$ (prendre $A = [-1, 1]$, $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x$).
   (b) Comme dans la question précédente, le raisonnement doit être complet ici. Il est faux de soustraire des inégalités. On ne peut pas « majorer dans les valeurs absolues » ni « appliquer la valeur absolue » à une inégalité, puisque $x \mapsto |x|$ n'est pas croissante. On rappelle que pour une fonction k-lipschitzienne, la constante k ne peut pas être prise dans un corps quelconque. La valeur absolue est souvent oubliée : beaucoup de candidats utilisent la simple inégalité $\forall (x, y) \in E^2, d_F(x) - d_F(y) \leqslant ||x - y||$ pour conclure.

3. (a) Certains candidats montrent que K est fermé et borné, mais ne concluent pas. $\varnothing$ est fermé. Certains candidats pensent que l'intersection de deux parties non vide est toujours non vide. Pour pouvoir affirmer qu'un fermé borné est compact, il convient de rappeler que c'est une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. F n'est pas bornée a priori.
   (b) Peu de candidats ont compris qu'il s'agissait de passer du minimum sur K au minimum global. Rappelons qu'une fonction réelle continue n'atteint sa borne inférieure sur un compact que si ce dernier est non vide. Beaucoup de candidats ont voulu montrer que d_F admet un minimum sur K.

4. (a) Beaucoup trop de candidats écrivent que $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||\,||v||$. Une démonstration géométrique est peu convaincante. Il convient de respecter la notation du produit scalaire de l'énoncé. On ne peut pas effectuer le calcul comme si u et v étaient des nombres réels.

(b) Certains candidats utilisent l'inégalité triangulaire et obtiennent une inégalité large, sans pouvoir conclure ou concluent en affirmant que l'inégalité est stricte puisque $f \neq f'$, ce qui n'est pas évident. Beaucoup de candidats crivent que $\forall (u,v) \in E^2$, $||u+v||^2 \leqslant ||u||^2 + ||v||^2$. Il faut préciser que $\frac{1}{2}(f+f') \in F$, car F est supposée convexe.
Attention à la nature des objets mathématiques manipulés : écrire que $\Gamma(x)^2 \leqslant d_F(x)^2$ n'a pas de sens puisque que $\Gamma(x)$ est un ensemble.
Peu de candidats pensent à rappeler que $\Gamma(x)$ est effectivement non vide avant de conclure que c'est un singleton. Attention au fait que $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante.

(c) i. $\varphi(t)$ n'est ni une fonction ni un polynôme, mais un nombre réel. Certains candidats trouvent un polynôme dont les coefficients dépendent de l'indéterminée ou un polynôme en « x ».

ii. Beaucoup de candidats montrent que φ admet un minimum en regardant le signe du coefficient dominant. Or l'existence du minimum n'a rien à voir avec cela (on travaille sur le segment $[0, 1]$). Une fonction dérivable admettant un minimum local en 0 n'est pas nécessairement croissante sur un voisinage de 0 à droite (penser à la fonction $x \mapsto x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0).
Attention à la nature des objets mathématiques manipulés : l'inégalité $0 \leqslant (f - \pi(x))t \leqslant f - \pi(x)$ n'a pas de sens, puisque $f - \pi(x)$ est un vecteur.
Certains souhaitent utiliser les variations d'une fonction polynômiale de degré 2, mais considèrent que la courbe représentative d'une telle fonction est toujours une parabole directe (une justification est attendue ici). Les raisonnements de ce type étaient en général très imprécis et les arguments indispensables n'ont pas été assez mis en avant.

(d) Question peu abordée.

Partie II

5. Beaucoup de candidats sont mal à l'aise avec le fait que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $d_{\{0\}}(x) = x$ et que pourtant $d_{\{0\}}$ ne soit pas dérivable en 0. C'est une illustration du fait que l'on ne dérive pas une expression de x, mais bien une fonction. Beaucoup de candidats ont du mal à montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Il suffit, pour cela, d'étudier les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement en 0. L'étude des limites à gauche et à droite de la dérivée est possible, mais requiert par exemple l'usage du théorème de la limite de la dérivée. Il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'a pas de limite en 0 (par exemple $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0). Beaucoup de candidats conservent l'écriture avec la norme sans passer à la valeur absolue : il subsiste alors un doute quant à la compréhension de la nature de $d_{\{0\}}$. On rappelle que $0 \in \mathbb{R}_+$ et $0 \in \mathbb{R}_-$. Attention, la notation $d'_{\{0\}}(0^+)$ ne désigne pas a priori la dérivée à droite en 0, mais la limite à droite en 0 de la dérivée. Il ne faut pas dire que $d_{\{0\}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour ensuite dire qu'elle n'est pas dérivable en 0. Dire qu'une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ n'implique pas qu'elle n'est pas dérivable en 0. Certains candidats pensent que $d'_{\{0\}}$ admet un point de discontinuité en 0, ce qui n'est pas le cas (la situation est analogue à $x \mapsto \frac{1}{x}$).

6. Plusieurs candidats écrivent qu'une réunion de fermés est un fermé, ce qui est manifestement faux, puisque toute partie de $\mathbb{R}$ est une réunion de singletons et qu'un singleton est fermé. Plusieurs candidats justifient que $\mathbb{Z}$ est fermé par l'argument "toutes ses parties finies sont fermées". L'argument est incorrect, puisque c'est le cas pour toutes les parties de $\mathbb{R}$. Une réunion dénombrable de fermés n'est généralement pas fermée (penser à $\mathbb{Q}$). La majorité des parties de $\mathbb{R}$ ne sont ni ouvertes ni fermées. Certains candidats écrivent que $d_{\mathbb{Z}}$ est continue en tout point de $\mathbb{Z}$, car sa restriction à $\mathbb{Z}$ est constante et donc continue. Mais toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est continue en restriction à $\mathbb{Z}$, puisque $\mathbb{Z}$ est discret, mais n'est généralement pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$ (on peut penser à l'indicatrice de $\mathbb{Q}$). Beaucoup de candidats « passent à la limite » dans une fonction sans se préoccuper de la continuité de la fonction au point limite. Or, la fonction partie entière n'est pas continue en tout point, donc on ne peut pas déduire directement de $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lfloor x_n \rfloor$ que $a = \lfloor a \rfloor$ et donc que a est entier (on peut

raisonner par l'absurde, car si a n'est pas entier, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a). On rappelle qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ; il n'est pas nécessaire de préciser que la réunion est dénombrable. Éviter de noter $\overline{\mathbb{Z}}$ le complémentaire de $\mathbb{Z}$, surtout dans une question demandant de montrer que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Enfin, $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathbb{Z}$.

7. $\forall f \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Z} \iff f - 1 \in \mathbb{Z}$ ne suffit pas à assurer que $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f \mapsto f - 1$ est surjective (penser à $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \iff n + 1 \in \mathbb{N}$). Beaucoup de candidats semblent penser que pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, il est nécessaire de montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + kT) = f(x)$. On relève l'utilisation d'une formule fausse $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$. On attend une démonstration de la formule $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Beaucoup de candidats affirment sans démonstration que $\forall x \in \mathbb{R},\ d_{\mathbb{Z}}(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$ ou que l'entier le plus proche d'un réel x est $\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + 1$. Un dessin ne constitue pas une démonstration. Le fait que $d_{\mathbb{Z}}$ soit 1-périodique ne dépend pas de x. Attention, si une fonction n'est pas impaire, elle n'est pas automatiquement paire.

8. Comme dans la question 7, le fait que l'entier le plus proche de x soit 0 ou 1 doit être (rapidement) justifié. On s'attend à ce que le dessin de $d_{\mathbb{Z}}$ ne soit pas grossièrement contradictoire avec ce qui a été démontré en début de problème. Certains candidats oublient la périodicité de la question précédente.

9. Attention, l'utilisation des limites de la dérivée requiert l'usage d'un théorème avec ses hypothèses. Des candidats confondent la limite du taux d'accroissement et la limite de la dérivée. Attention au fait qu'ici, on demande la dérivabilité en tout point de $[0, 1[$, pas la dérivabilité de la restriction à $[0, 1[$. $d_{\mathbb{Z}}$ n'est pas dérivable en 0. Une fonction affine par morceaux n'est généralement pas dérivable en tout point, même si elle est continue. La proposition « une fonction continue est dérivable » est grossièrement fausse. Certains candidats parlent « d'union de fonction dérivables ». On rappelle que le mot « composée » fait référence à la loi $\circ$ et que la fonction valeur absolue n'est pas la composée de $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

10. (a) Question peu traitée. L'expression des coefficients de Fourier est peu connue. Un simple changement de variable permet de retrouver les coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique à partir des coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique. Le 2 est souvent oublié. Le coefficient 2π est parfois oublié ou mal placé.

    (b) Certains candidats montrent que la série de Fourier converge normalement de manière directe à l'aide du calcul précédent, mais oublient de justifier que la somme est bien égale à $d_{\mathbb{Z}}$. Il existe des fonctions continues périodiques dont la série de Fourier diverge. Quand on divise par un entier n, il convient de traiter à part le cas où $n = 0$.

    (c) Les constantes multiplicatives sont nécessaires dans les équivalents.Ainsi, il est faux d'affirmer que $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. L'assertion $\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \sum \frac{1}{4n^2}$ n'a pas de sens. Les sommes de deux séries à termes positifs équivalents ne sont en général pas égales. La positivité d'un terme général est souvent oubliée. Rappelons que $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ diverge. Plusieurs candidats confondent le critère de convergence de Riemann et celui de d'Alembert. Dans une expression du type $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots$, n est muet, donc la somme n'en dépend pas. En particulier, elle ne peut pas dépendre de la parité de n.

11. (a) La réflexivité n'est pas évidente et découle du fait que Ω est ouvert. Pour la transitivité, de nombreux candidats prennent le même intervalle pour les couples (x, y) et (y, z).

    (b) Certains candidats pensent que la classe d'un réel x est égale à n'importe lequel des intervalles $]a, b[$ de la définition. Peu le décrivent comme la réunion de tels intervalles. Parmi eux, certains l'affirment sans le démontrer. Lorsque l'énoncé demande explicitement de montrer que les intervalles sont disjoints, « c'est évident » n'est pas une réponse acceptable. Le fait que les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes ne vient pas seulement de la transitivité (car sinon, ce serait vrai pour les relations d'ordre). Certains candidats affirment qu'un fermé de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles fermés deux à deux disjoints, ce qui est faux et inutile ici. Certains candidats se contentent de dire que le résultat est vrai car Ω est ouvert et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert.

(c) L'ensemble I et la famille $((a_i, b_i))_{i \in I}$ sont très rarement définis. La majorité des candidats se contente d'affirmer sans justification le caractère fini ou dénombrable.

12. (a)

(b) Question peu abordée.

13. Il ne suffit pas de dire que $d_F(x) = 0$ pour affirmer que d_F est dérivable en x et que $d'_F(x) = 0$, mais bien de dire que d_F est nulle sur un voisinage de x. Par exemple, $f : x \mapsto x$ vérifie $f(0) = 0$ et pourtant $f'(0) = 1 \neq 0$ et $g : x \mapsto |x|$ vérifie $g(0) = 0$ et g n'est pas dérivable en 0. De manière générale, on rappelle que l'on ne dérive pas $f(x)$ mais f.

14. (a) i. Certains candidats utilisent le fait que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \geqslant 0$, ce qui est insuffisant. Certains candidats utilisent le fait que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour montrer que 0 est adhérent à Ω, mais $\forall n \geqslant 2, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \notin \Omega$. Certains candidats pensent à tort que $\Omega = \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

iv. Le théorème d'encadrement est rarement cité et la minoration par 0 est souvent omise.

Partie III

15. (a) De nombreux candidats concluent que $\Gamma(x) = x_0$ au lieu de $\Gamma(x) = \{x_0\}$.

(b) Parfois, les calculs sont menés comme si $E = \mathbb{R}$, avec notamment h (élément de E) en dehors du produit scalaire. « h petit » n'est pas une notion bien définie.

(c) On rappelle que $\sqrt{\cdot}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition. On rappelle également qu'elle ne peut être dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puisqu'elle n'est pas définie sur cet ensemble.

16.

17. (a) Le dessin proposé doit être de qualité raisonnable. Il faut notamment éviter que la parabole soit grossièrement dissymétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Un élément de $\mathbb{R}^2$ est un couple de réels, égal à son couple de coordonnées dans la base canonique. On peut donc utiliser le signe $=$ entre les deux.

(b) Écrire le complémentaire de F et affirmer que ce dernier est ouvert sans le justifier (ce qui n'est pas plus simple à faire) ne rapporte pas de point. La fonction $(x, y) \mapsto y - x^2$ n'est clairement pas linéaire. Beaucoup affirment que F est la réunion de deux fermés, sans justifier le caractère fermé des deux ensembles.

(c) Affirmer sans démonstration que $\mathrm{Fr}(F)$ est la réunion d'une parabole et de l'axe des abscisses ne rapporte pas de point.

Partie IV

18. (a)

(b) Beaucoup de candidats raisonnent en dimension 3. Rappelons que dans ce cas, il n'existe pas de plans orthogonaux.

(c)

Partie V

25. (b) On ne peut pas remplacer a par x ici.

Partie VI

28. (b) i. Beaucoup de candidats traitant la question oublient de vérifier que le coefficient du terme de degré 2 est effectivement non nul pour montrer qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré 2.

29. (a) Question sans difficulté particulière.

3.2.4 Éléments de correction

Partie I

1. Soit $x \in E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $d_F(x) = \inf\limits_{f \in F} \|x - f\| = 0$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f \in F, \|x - f\| \leqslant \varepsilon$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in F$ tel que $\|x - f_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.
La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers x et $x \in \overline{F}$. Ainsi, $x \in F$, puisque F est fermée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x \in F$. Alors,

$$0 \leqslant \inf_{f \in F} \|x - f\| \underset{\text{car } x \in F}{\leqslant} \|x - x\| = 0$$

Donc, $d_F(x) = 0$.

2. (a) Soient $(x, y) \in E^2$ et $f \in F$. Alors,

$$d_F(y) = \inf_{g \in F} \|x - g\| \leqslant \|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|$$

(b) Comme $\forall f \in F, \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$, par passage à la borne inférieure (qui est le plus grand des minorants),

$$d_F(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$$

Ceci étant vrai quels que soient x et y, en les échangeant, on obtient :

$$d_F(y) \geqslant d_F(x) - \|x - y\| = d_F(x) - \|y - x\|$$

Donc,

$$d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|y - x\| \quad \text{et} \quad d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|y - x\|$$

Ainsi, $|d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|$.

3. (a) Comme $\|x_0 - x\| = r \leqslant r$, $x_0 \in \overline{B}(x, r)$ et $x_0 \in F$ par hypothèse. Ainsi, $x_0 \in K$. Donc, *K est non vide.*

Par ailleurs, *K est fermée* comme intersection de parties fermées et *bornée*, car incluse dans la partie bornée $\overline{B}(x, r)$. C'est donc *une partie compacte de E*, puisque E est un $\mathbb{R} - e.v.n.$ de dimension finie.

(b) D'après la question précédente, K est une partie compacte non vide de E. Donc, comme la fonction réelle $y \mapsto \|x - y\|$ est continue, elle admet un minimum sur K.

Soit $f_0 \in F$ réalisant ce minimum. Alors, pour tout $f \in F$,

- si $\|x - f\| \leqslant r$, $f \in K$, donc $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$;
- si $\|x - f\| > r$, comme $r = \|x - x_0\|$ et $x_0 \in K$, $\|x - f\| > \|x - x_0\| \geqslant \|x - f_0\|$;

donc, dans tous les cas, $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$. Ainsi, $f_0 \in \Gamma(x)$ et $\Gamma(x) \neq \varnothing$.