Partie VI

28. (b) i. Beaucoup de candidats traitant la question oublient de vérifier que le coefficient du terme de degré 2 est effectivement non nul pour montrer qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré 2.

29. (a) Question sans difficulté particulière.

3.2.4 Éléments de correction

Partie I

1. Soit $x \in E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $d_F(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\| = 0$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f \in F, \|x - f\| \leqslant \varepsilon$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in F$ tel que $\|x - f_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.
La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers x et $x \in \overline{F}$. Ainsi, $x \in F$, puisque F est fermée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x \in F$. Alors,

$$0 \leqslant \inf_{f \in F} \|x - f\| \underset{\text{car } x \in F}{\leqslant} \|x - x\| = 0$$

Donc, $d_F(x) = 0$.

2. (a) Soient $(x, y) \in E^2$ et $f \in F$. Alors,

$$d_F(y) = \inf_{g \in F} \|x - g\| \leqslant \|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|$$

(b) Comme $\forall f \in F, \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$, par passage à la borne inférieure (qui est le plus grand des minorants),

$$d_F(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$$

Ceci étant vrai quels que soient x et y, en les échangeant, on obtient :

$$d_F(y) \geqslant d_F(x) - \|x - y\| = d_F(x) - \|y - x\|$$

Donc,

$$d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|y - x\| \quad \text{et} \quad d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|y - x\|$$

Ainsi, $|d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|$.

3. (a) Comme $\|x_0 - x\| = r \leqslant r$, $x_0 \in \overline{B}(x, r)$ et $x_0 \in F$ par hypothèse. Ainsi, $x_0 \in K$. Donc, *K est non vide.*

Par ailleurs, *K est fermée* comme intersection de parties fermées et *bornée*, car incluse dans la partie bornée $\overline{B}(x, r)$. C'est donc *une partie compacte de E*, puisque E est un $\mathbb{R}-$*e.v.n.* de dimension finie.

(b) D'après la question précédente, K est une partie compacte non vide de E. Donc, comme la fonction réelle $y \mapsto \|x - y\|$ est continue, elle admet un minimum sur K.
Soit $f_0 \in F$ réalisant ce minimum. Alors, pour tout $f \in F$,

- si $\|x - f\| \leqslant r$, $f \in K$, donc $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$;
- si $\|x - f\| > r$, comme $r = \|x - x_0\|$ et $x_0 \in K$, $\|x - f\| > \|x - x_0\| \geqslant \|x - f_0\|$;

donc, dans tous les cas, $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$. Ainsi, $f_0 \in \Gamma(x)$ et $\Gamma(x) \neq \varnothing$.

4. (a) Soit $(u,v) \in E^2$.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \left\|v^2\right\| + 2\langle u,\, v\rangle$$

et

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \left\|v^2\right\| - 2\langle u,\, v\rangle$$

donc

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \left\|v^2\right\|\right)$$

(b) On applique ce qui précède à $u := \frac{1}{2}(f-x)$ et $v := \frac{1}{2}(f'-x)$. Compte tenu de ce que $\|u\| = \|v\| = \frac{1}{2}d_F(x)$ puisque $f \in \Gamma(x)$ et $f' \in \Gamma(x)$, on obtient

$$\left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(f-f')\right\|^2 = 2\left(\frac{1}{4}d_F(x)^2 + \frac{1}{4}d_F(x)^2\right) = d_F(x)^2$$

Or, $\left\|\frac{1}{2}(f-f')\right\|^2 = \frac{1}{4}\|f-f'\|^2 > 0$, puisque $f \neq f'$. Donc,

$$\left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\|^2 < d_F(x)^2$$

Ainsi, par stricte croissante de $\sqrt{\cdot}$, on en déduit que $\left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\| < d_F(x)$, ce qui est absurde puisque comme F est convexe, $\frac{1}{2}(f+f') \in F$ et $d_F(x) = \inf\limits_{g\in F}\|x-g\|$. Donc, $f = f'$ et $\Gamma(x)$ *est un singleton* (puisqu'il est non vide).

(c) i. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\varphi(t) = \|t(f-\pi(x)) + \pi(x) - f\|^2 = \|f-\pi(x)\|^2 t^2 + 2\langle f-\pi(x),\, \pi(x)-x\rangle t + \|\pi(x)-x\|^2$$

φ est donc la restriction à $[0,1]$ d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Comme, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)\pi(x) + tf \in F$ (puisque F est convexe),

$$\varphi(t) = \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \geqslant \|\pi(x)-x\|^2 \geqslant \varphi(0)$$

Ainsi, *φ admet un minimum en 0.*
Si $\varphi'(0) < 0$, alors $\varphi(t) - \varphi(0) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} t\varphi'(0)$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0,\alpha]$, $\varphi(t) < \varphi(0)$, ce qui contredit le point précédent.
Donc, $\varphi'(0) \geqslant 0$, c'est à dire $2\langle f-\pi(x),\, \pi(x)-x\rangle \geqslant 0$, d'où

$$\langle f-\pi(x),\, x-\pi(x)\rangle \leqslant 0$$

(d) Pour tout $f \in F$,

$$\|x-f\|^2 = \|x-z\|^2 + \|z-f\|^2 - 2\underbrace{\langle x-z,\, f-z\rangle}_{\leqslant 0} \geqslant \|x-z\|^2$$

donc

$$\|x-f\| \geqslant \|x-z\|$$

Ainsi, $\|x-z\| = d_F(x)$ et $z = \pi(x)$ par unicité.

Partie II

5. $\forall x \in \mathbb{R}, d_{\{0\}}(x) = |x|$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, d_0'(t) = \frac{t}{|t|} = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

$d_{\{0\}}$ n'est pas dérivable en 0, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} = -1$$

donc

$$\frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} -1 \neq 1$$

6. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ est ouvert comme union d'ouverts, donc $\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\right)$ *est bien un fermé.*

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(x+1) &= \inf \{|x+1-k|, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \inf \{|x-l|, l \in \mathbb{Z}\} \text{ puisque } \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k-1 \end{array} \text{ est surjective.} \\ &= d_{\mathbb{Z}}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, *$d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique.*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(-x) &= \inf \{|-x-k|, k \in \mathbb{Z}\} = \inf \{|x+k|, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \inf \{|x-l|, l \in \mathbb{Z}\} \text{ puisque } \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & -k \end{array} \text{ est surjective.} \\ &= d_{\mathbb{Z}}(x) \end{aligned}$$

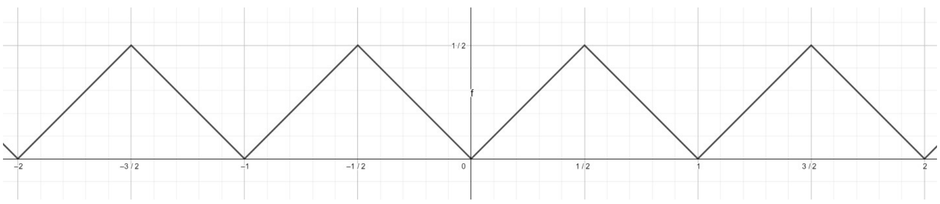
Ainsi, *$d_{\mathbb{Z}}$ est paire.*

8. Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- si $k \geqslant 1$, $|x-k| = k - x \geqslant 1 - x \geqslant \min(x, 1-x)$;
- si $k \leqslant 0$, $|x-k| = x - k \geqslant x \geqslant \min(x, 1-x)$.

Donc, $d_{\mathbb{Z}}(x) \geqslant \min(x, 1-x)$. Par ailleurs, $|x-0| = x$ et $|x-1| = 1-x$. Donc,

$$d_{\mathbb{Z}}(x) = \min(x, 1-x) = \frac{x+1-x-|x-(1-x)|}{2} = \frac{1-|2x-1|}{2}$$



9. *$d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable en tout point de $]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, mais pas en 0 ni en $1/2$.*

10. (a) Comme $d_{\mathbb{Z}}$ est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(d_{\mathbb{Z}}) = 0$.

$$a_0(d_{\mathbb{Z}}) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = 4\int_0^{1/2} t\,dt = 4\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{1/2} = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
a_n(d_{\mathbb{Z}}) &= 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\int_0^{1/2} t\cos(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\left(\left[\frac{t}{2\pi n}\sin(2\pi nt)\right]_{t=0}^{1/2} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{1/2} \sin\left(2\pi nt\right)\,dt\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{(2\pi n)^2}\Big[\cos(2\pi nt)\Big]_{t=0}^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) $d_{\mathbb{Z}}$ est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge normalement, et donc simplement et uniformément, sur $\mathbb{R}$ vers $d_{\mathbb{Z}}$.

(c) Notons d'abord que *les séries convergent par comparaison à des séries de Riemann convergentes.*

D'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ d_{\mathbb{Z}}(t) = \frac{a_0(d_{\mathbb{Z}})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(d_{\mathbb{Z}})\cos\left(2\pi nt\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(2(2n+1)\pi t\right)}{(2n+1)^2}$$

En évaluant en 0, on obtient :

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Si l'on pose $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

Les calculs sont justifiés par le fait que les séries sont toutes convergentes.

Donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

En utilisant la formule de Parseval,

$$\int_{-1/2}^{1/2} |d_{\mathbb{Z}}(t)|^2\,dt = \frac{|a_0(d_{\mathbb{Z}})|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(d_{\mathbb{Z}})|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^4\pi^4}$$

Or,

$$\int_{-1/2}^{1/2} |d_{\mathbb{Z}}(t)|^2 \, dt = 2\int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{1/2} = \frac{1}{12}$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - 1$$

En posant $S' := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

11. (a) **Réflexivité.** Soit $x \in \Omega$.
    Comme Ω est ouvert, il existe un intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[\subset \Omega$. Ainsi, $x \sim x$.
    Symétrie. Évident.
    Transitivité. Soit $(x,y,z) \in \Omega^3$. Supposons que $x \sim y$ et $y \sim z$.
    Il existe donc deux intervalles ouverts $]a,b[$ et $]c,d[$ inclus dans Ω tels que $(x,y) \in]a,b[^2$ et $(y,z) \in]c,d[^2$.
    Ainsi, $y \in]a,b[\cap]c,d[$, d'où $]\min(a,c), \max(b,d)[=]a,b[\cup]c,d[\subset \Omega$ et $(x,z) \in]\min(a,c), \max(b,d)[^2$.
    Donc, $x \sim z$.
    $\sim$ est donc une relation d'équivalence.

    (b) *Les classes d'équivalence sont 2 à 2 disjointes.* Cela vient de la transitivité et de la symétrie.
    Soit $x \in \Omega$.
    Pour tout $y \in \mathrm{Cl}(x)$, il existe un intervalle ouvert $]a_y, b_y[$ inclus dans Ω tel que $(x,y) \in]a_y, b_y[^2$ et pour tout $z \in]a_y, b_y[$, $z \in \mathrm{Cl}(x)$ (à l'aide de l'intervalle $]a_y, b_y[$), donc

    $$\forall y \in \mathrm{Cl}(x),\ y \in]a_y, b_y[\subset \bigcup_{t \in \mathrm{Cl}(x)}]a_t, b_t[\quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{Cl}(x),\ ]a_y, b_y[\subset \mathrm{Cl}(x)$$

    Ainsi,

    $$\mathrm{Cl}(x) = \bigcup_{y \in \mathrm{Cl}(x)}]a_y, b_y[$$

    $\mathrm{Cl}(x)$ est donc bien un ouvert. C'est une partie connexe de $\mathbb{R}$ comme réunion de connexes d'intersection non vide (puisque $\forall y \in \mathrm{Cl}(x), x \in]a_y, b_y[$), donc un intervalle.
    Finalement, $\mathrm{Cl}(x)$ *est un intervalle ouvert.*

    (c) $I := \Omega/\sim = \{\mathrm{Cl}(x)\ ,\ x \in \Omega\}$ est une partition de Ω. Pour tout $i \in I$, i est un intervalle ouvert que l'on note $]a_i, b_i[$. *Les intervalles* $]a_i, b_i[, i \in I$ *sont deux à deux disjoints et*

    $$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$$

    Par ailleurs, pour tout $i \in I$, il existe un rationnel r_i élément de $]a_i, b_i[$, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Les intervalles étant deux à deux disjoints, $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ i & \longmapsto & r_i \end{array}$ est injective. *Donc, I est fini ou dénombrable*, car $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

12. (a) **1$^{\text{er}}$cas :** a_{i_0} et b_{i_0} réels.

Pour tout $f \in F$, $f \leqslant a_{i_0}$ ou $f \geqslant b_{i_0}$, donc $|x-f| \geqslant \min(x-a_{i_0}, b_{i_0}-x)$. De plus $a_{i_0} \in F$ et $b_{i_0} \in F$. Ainsi,

$$d_F(x) = \min(x-a_{i_0}, b_{i_0}-x) = \frac{1}{2}\left(x-a_{i_0}+b_{i_0}-x-|a_{i_0}+b_{i_0}-2x|\right) = \frac{b_{i_0}-a_{i_0}}{2} - \left|\frac{b_{i_0}+a_{i_0}}{2}-x\right|$$

2$^{\text{e}}$cas : $a_{i_0} = -\infty$ et b_{i_0} réel.

Pour tout $f \in F$, $f \geqslant b_{i_0}$ donc $|x-f| \geqslant b_{i_0}-x$. De plus, $b_{i_0} \in F$. Ainsi,

$$d_F(x) = b_{i_0} - x$$

3$^{\text{e}}$cas : a_{i_0} réel et $b_{i_0} = +\infty$.

$$d_F(x) = x - a_{i_0}$$

4$^{\text{e}}$cas : $a_{i_0} = -\infty$ et $b_{i_0} = +\infty$.

Ce cas n'est pas possible, puisque F est supposée non vide dans tout l'énoncé.

(b) Si a_{i_0} et b_{i_0} sont réels, d_F est dérivable en x si et seulement si $x \neq \dfrac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}$.

Dans les autres cas, d_F est dérivable en x.

13. Comme $x \in \overset{\circ}{F}$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant $]x-\alpha, x+\alpha[\subset F$. d_F est alors nulle sur $]x-\alpha, x+\alpha[$, donc sur un voisinage de x. *Elle est donc dérivable en x et $d'_F(x) = 0$.*

14. (a) $\overset{\circ}{F} =]0,1[$ donc $\mathrm{Fr}(F) = \{0,1\}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_F(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } x \in]0,1[\\ x-1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$. d_F n'est pas dérivable en 0, ni en 1.

(b) i. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\left]\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[\subset \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, donc $\Omega \subset \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Ω est ouvert comme réunion d'ouverts. *F est donc fermé* comme complémentaire d'un ouvert.

$0 \in F$, puisque $0 \notin \Omega$. Supposons que $0 \in \overset{\circ}{F}$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset F$. Ainsi, il existe un entier n tel que $n \geqslant 2$ et $\frac{1}{n} < \alpha$ (puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). Donc, $\left]\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[\subset]-\alpha, \alpha[\subset F$. Absurde.

Donc, $0 \in \mathrm{Fr}(F)$.

ii. Soient m et n deux entiers tels que $2 \leqslant m < n$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3} &\iff \frac{1}{m^3} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)} \\ &\iff (0 <) \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m+1} \text{ car } m > 0 \\ &\iff m+1 < m^2 \end{aligned}$$

Comme $m \geqslant 2$, $m^2 \geqslant 2m \geqslant m+2 > m+1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3}$$

D'où,

$$\left]\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[\cap \left]\frac{1}{m}-\frac{1}{m^3}, \frac{1}{m}\right[= \varnothing$$

L'unicité en découle. L'existence est évidente.

Par ailleurs,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n}.$$

Donc,

$$n < \frac{1}{x} < n+1.$$

D'où,

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

iii. Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

1^er^cas : $x \in \Omega$. Alors, en posant $n := \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,

$$x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[.$$

De plus, comme $\frac{1}{x} < n+1$,

$$0 < \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 < n \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{1-x}$$

Comme $\frac{1}{n} \in F$,

$$d_F(x) \leqslant \frac{1}{n} - x < \frac{1}{n^3} < \frac{x^3}{(1-x)^3} \leqslant 8x^3 \text{ car } 1 - x > \frac{1}{2}$$

2^e^cas : $x \in F$. Alors,

$$d_F(x) = 0 \leqslant 8x^3$$

Dans tous les cas, $d_F(x) \leqslant 8x^3$.

iv. Pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$0 \leqslant \frac{d_F(x) - d_F(0)}{x} = \frac{d_F(x)}{x} \leqslant 8x^2 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$$

Ainsi, d_F est dérivable en 0 à droite et $(d_F)'_d(0) = 0$.

v. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $x \in F$ donc $d_F(x) = 0$. Ainsi, d_F *est dérivable à gauche en 0 et* $(d_F)'_g(0) = 0$.
Comme $(d_F)'_g(0) = (d_F)'_d(0)$, d_F *est dérivable en* 0.

Partie III

15. (a) $d_F : x \mapsto \|x - x_0\|$ *et pour tout* $x \in E$, $\Gamma(x) = \{x_0\}$.

(b) Soit $x \in E$. Pour tout $h \in E$,

$$g(x+h) = \|x - x_0 + h\|^2 = \|x - x_0\|^2 + 2\langle x - x_0, h\rangle + \|h\|^2 = g(x) + \langle 2(x - x_0), h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

On en déduit que g *est différentiable en* x *et que* $\nabla g(x) = 2(x - x_0)$.

(c) Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$. u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall t > 0, \forall h \in \mathbb{R},\ du(t).h = \frac{h}{2\sqrt{t}}$$

Donc, $d_F\big|_{E\setminus\{x_0\}} = u \circ g\big|_{E\setminus\{x_0\}}$ est différentiable sur $E\setminus\{x_0\}$ et pour tous $a \in E\setminus\{x_0\}$ et $h \in E$,

$$\begin{aligned} d(d_F)(a)\cdot h &= (du(g(a)) \circ dg(a))\cdot h \\ &= du(g(a))\cdot(dg(a)\cdot h) \\ &= \frac{2\langle a-x_0,\, h\rangle}{2\sqrt{g(a)}} \\ &= \left\langle \frac{1}{\|a-x_0\|}(a-x_0),\, h\right\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla d_f(a) = \frac{1}{\|a-x_0\|}(a-x_0) = \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a))$$

(d) i. Soit $h \in E$. Comme on suppose que d_F est différentiable en x_0, on a

$$d_F(x_0+u) = d_F(x_0) + \langle \nabla d_F(x_0),\, u\rangle + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(\|u\|)$$

Donc, comme $d_F(x_0) = 0$,

$$d_F(x_0+th) = \langle \nabla d_F(x_0),\, th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

ii. Soit $h \in E$. D'après ce qui précède, comme $d_F(x_0+th) = \|th\| = |t|\,\|h\|$,

$$\frac{|t|}{t}\|h\| = \frac{d_F(x_0+th)}{t} = \langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

Les limites à gauche et à droite donnent

$$\|h\| = \langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle = -\|h\|$$

ce qui implique que $\|h\| = 0$ et $h = 0_E$, et ce pour tout $h \in E$. Absurde, puisque $\dim(E) \neq 0$.
d_F n'est donc pas différentiable en x_0.

16. (a) Soit $x \in E$. Comme F est convexe, $\Gamma(x)$ est un singleton.
Notons p le projecteur orthogonal sur F. Alors, pour tout $f \in F$, comme $x - p(x) \perp p(x) - f$,

$$\|x-f\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2 \geqslant \|x-p(x)\|^2$$

avec égalité si et seulement si $f = p(x)$. Donc, $p(x) \in \Gamma(x)$ et $\pi(x) = p(x)$ par unicité.

(b) Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} d_F^2(a+h) &= \|a+h-\pi(a+h)\|^2 = \|a-\pi(a)+h-\pi(h)\|^2 \\ &= \|a-\pi(a)\|^2 + \|h-\pi(h)\|^2 + 2\langle a-\pi(a),\, h-\pi(h)\rangle \\ &= d_F^2(a) + \langle 2(a-\pi(a)),\, h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|) \end{aligned}$$

puisque, comme $\pi(h) \perp h-\pi(h)$, $\|h-\pi(h)\|^2 = \|h\|^2 - \|\pi(h)\|^2 \leqslant \|h\|^2$ et $\pi(h) \perp a-\pi(a)$.
Donc, d_F^2 est différentiable en a et $\nabla d_F^2(a) = 2(a-\pi(a))$.

(c) Soit $a \in E\setminus F$. On pose $g := d_F^2$ et on considère à nouveau $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$.

$d_F\big|_{E\setminus F} = u \circ g\big|_{E\setminus F}$ est différentiable en a et pour tout $h \in E$,

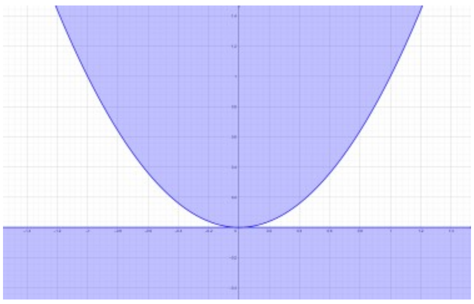
$$\begin{aligned} d(d_F)(a)\cdot h &= (du(g(a)) \circ dg(a))\cdot h \\ &= du(g(a))\cdot(dg(a)\cdot h) \\ &= \frac{2\langle a-\pi(a),\, h\rangle}{2\sqrt{g(a)}} \\ &= \left\langle \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a)),\, h\right\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,
$$\nabla d_f(a) = \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a))$$

(d) i. Comme d_F est différentiable en a de gradient u, on a
$$d_F(a+th) = d_F(a) + \langle u,\, th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\left(\langle u,\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)\right) \text{ car } d_F(a)=0$$
Or, $\forall t\in\mathbb{R}$, $d_F(a+th) = \|a+th-\pi(a+th)\| = \|a+th-a\| = |t|\,\|h\|$, puisque π est le projecteur orthogonal sur F, $a\in F$ et $h\in F^{\perp}$.
Ainsi,
$$\frac{|t|\,\|h\|}{t} = \langle u,\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$
En prenant la limite à droite en 0, $\|h\| = \langle u,\, h\rangle$.

ii. Comme pour tout $h\in F^{\perp}$, $-h\in F^{\perp}$, d'après la question précédente,
$$\langle u,\, h\rangle = \|h\| = \|-h\| = \langle u,\, -h\rangle = -\langle u,\, h\rangle$$
Ainsi, $\|h\| = \langle u,\, h\rangle = 0$.
Donc, $F^{\perp}\subset\{0_E\}$. Absurde, puisque $F\neq E$. *d_F n'est donc pas différentiable en a.*

17. (a)



(b) Posons $f_1 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & y\end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & y-x^2\end{array}$ sont continues (car polynomiales).
Ainsi, $f_1^{-1}(\mathbb{R}_-)$ et $f_2^{-1}(\mathbb{R}_+)$ sont des parties fermées. *Donc, F est une partie fermée comme réunion finie de fermés.*

(c) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}\in F$. Supposons que $0_{\mathbb{R}^2}\in\mathring{F}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, tel que $B(0_{\mathbb{R}^2},\varepsilon)\subset F$.

Soit $x>0$ tel que $x<\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $x<1$. On pose $u := \begin{pmatrix}x\\x^3\end{pmatrix}$.
$$\|u\| = \sqrt{x^2+x^6} = x\underbrace{\sqrt{1+x^4}}_{\leqslant 2} \leqslant 2x < \varepsilon$$
Donc, $u\in B(0_{\mathbb{R}^2},\varepsilon)$. Ainsi, $u\in F$. Donc, $x^3\leqslant 0$ ou $x^3\geqslant x^2$. Or, $x>0$. Donc, $x^3\geqslant x^2$. D'où, $x\geqslant 1$. Absurde, puisque $x<1$. *Ainsi, $0_{\mathbb{R}^2}\in F\backslash\mathring{F} = \mathrm{Fr}(F)$ (F est fermée).*

(d) Soit $u := \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

Si $u\in F$: alors $d_F(u) = 0\leqslant\|u\|^2$.

Si $u\notin F$: $y>0$ et $y<x^2$. Donc, comme $f := \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in F$,
$$d_F(u)\leqslant\|u-f\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right\| = |y| = y < x^2\leqslant\|u\|^2$$
Dans tous les cas, $d_F(u)\leqslant\|u\|^2$.

(e) Pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant d_F(h) \leqslant \|h\|^2$, donc $d_F(h) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$. Comme $d_F(0_{\mathbb{R}^2}) = 0$, on en déduit que

$$d_F(0_{\mathbb{R}^2} + h) = d_F(0_{\mathbb{R}^2}) + \langle 0_{\mathbb{R}^2},\, h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

d_F est donc différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et $\nabla d_F(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV

18. (a) Comme $u \in \mathrm{Vect}\,(a)$, $\mathrm{Vect}\,(a, u, y) = \mathrm{Vect}\,(a, y)$ est donc un *sev* de dimension finie inférieure ou égale à 2, donc *inclus dans un plan noté* $\mathcal{P}$.

(b) Pour tout $u \in E$,

$$u \in S \iff (u \in \mathcal{P} \text{ et } u \in F) \iff (u \in \mathcal{P} \text{ et } \|u\| = 1)$$

S est donc le cercle unité de $\mathcal{P}$.

(c) On complète u en une base orthonormée (u, v) de $\mathcal{P}$. Pour tout vecteur x de $\mathcal{P}$, on note z_x l'affixe de x dans cette base.
Ainsi, $z_u = 1$, $z_a = \|a\| \in \mathbb{R}_+^*$ et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z_y = e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}\|y - a\|^2 = |z_y - z_a|^2 = \left|e^{i\theta} - \|a\|\right|^2 &= (\cos(\theta) - \|a\|)^2 + \sin^2(\theta)\\ &= 1 + \|a\|^2 - 2\cos(\theta)\,\|a\| \geqslant 1 + \|a\|^2 - 2\,\|a\| = (\|a\| - 1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\|y - a\|^2 \geqslant (\|a\| - 1)^2$ avec égalité si et seulement si $\cos(\theta) = 1$, donc si et seulement si $\theta = 0$ (car $\theta \in [0, 2\pi[$), d'où si et seulement si $y = u$.
On en déduit que $\Gamma(a) = \{u\}$, que $\pi(a) = \frac{1}{\|a\|}a$ et que $d_F(a) = \|a - \pi(a)\| = \|u - a\| = |\|a\| - 1|$.

19. Soit $a \in E$.

Si $a \neq 0_E$, d'après ce qui précède, $d_F(a) = |\|a\| - 1|$.

Si $a = 0_E$, pour tout $y \in F$, $\|y - a\| = \|y\| = 1$. Donc, $d_F(a) = 1 = |\|a\| - 1|$.

20. Soit $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$. Ainsi, $\|a\| \neq 1$.

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & |t|\end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc}E\backslash(\{0_E\} \cup F) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\| - 1\end{array}$.

φ est différentiable et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall h \in \mathbb{R},\, d\varphi(t)\cdot h = \mathrm{sgn}\,(t)\, h$$

D'après la question 15c, $\psi = -1 + d_{\{0_E\}}\big|_{E\backslash(\{0_E\}\cup F)}$ est différentiable et

$$\forall x \in E\backslash(\{0_E\} \cup F), \forall h \in E, d\psi(x)\cdot h = \left\langle \frac{1}{\|x\|}x,\, h\right\rangle$$

Comme $d_F = \varphi \circ \psi$ (noter que la composition est possible puisque ψ ne s'annule pas), d_F est différentiable en tout $x \in E\backslash(\{0_E\} \cup F)$ et

$$\begin{aligned}\forall h \in E, d(d_F)(x)\cdot h &= d\varphi(\psi(x))\cdot(d\psi(x)\cdot h)\\ &= \mathrm{sgn}\,(\|x\| - 1)\left\langle \frac{1}{\|x\|}x,\, h\right\rangle\\ &= \left\langle \frac{\mathrm{sgn}\,(\|x\| - 1)}{\|x\|}x,\, h\right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, comme $d_F(x) = |\|x\| - 1|$,

$$\nabla d_F(x) = \frac{\mathrm{sgn}\,(\|x\| - 1)}{\|x\|}x = \frac{\|x\| - 1}{|\|x\| - 1|}\frac{1}{\|x\|}x = \frac{1}{d_F(x)}\left(x - \frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|x - \pi(x)\|}(x - \pi(x))$$

21. Pour tout $f \in F$, $\|0_E - f\| = \|f\| = 1$, donc $d_F(0_E) = 1$ et $\Gamma(0_E) = F$.

22. Pour tout $t \in]-1,1[$, $d_F(a+ta) = |\|a+ta\| - 1| = ||1+t|\,\|a\| - 1| = |1+t-1| = |t|$

    Supposons que d_F soit différentiable en a. Alors $t \mapsto d_F(a+ta)$ est dérivable en 0, ce qui est absurde.

    Donc, *d_F n'est pas différentiable en a.*

23. (a) Pour tout $t \in]-1,1[$, $\varphi(t) = |\|tv\| - 1| = ||t|\,\|v\| - 1| = ||t| - 1| = 1 - |t|$.
    $|\cdot|$ n'étant pas dérivable en 0, φ ne l'est pas non plus.

    (b) Supposons que d_F soit différentiable en 0. Alors, φ est différentiable (donc dérivable) en 0, car de plus, $t \mapsto tv$ est différentiable en 0 et d'image nulle en 0. Absurde. *d_F n'est donc pas différentiable en 0_E.*

Partie V

24. (a) D'après la question 2b, d_F est 1-lipschitzienne. Donc, pour tout $t > 0$,

$$d_F(a+tu) - d_F(a) \leqslant \|a+tu-a\| = |t|\,\|u\| \leqslant t\,\|u\|$$

    (b) Comme d_F est différentiable en a, de gradient égal à u,

$$d_F(a+tu) - d_F(a) = \langle u,\, tu\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\,\|u\|^2 + t\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

    Ainsi,

$$t\left(\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)\right) \leqslant t\,\|u\|$$

    Donc,

$$\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1) \leqslant \|u\|$$

    Par passage à la limite en 0 à droite, on obtient

$$\|u\|^2 \leqslant \|u\|$$

    Donc, si $\|u\| > 0$, $\|u\| \leqslant 1$ et si $\|u\| = 0$, $\|u\| \leqslant 1$. *Dans tous les cas, $\|u\| \leqslant 1$.*

25. (a) Soit $x \in [a,y]$. Il existe $t \in [0,1]$ vérifiant $x = (1-t)a + ty$. Alors, comme $y \in \Gamma(a)$,

$$d_F(a) = \|a-y\| = \|a-x+x-y\| = \|a-x\| + \|x-y\|$$

    puisque $a - x = t(a-y)$ et $x - y = (1-t)(a-y)$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). *Ainsi,*

$$\|x-y\| = d_F(a) - \|a-x\|$$

    (b) Soient $x \in [a,y]$ et $z \in \Gamma(x)$.

$$d_F(x) \leqslant \|x-y\| = d_F(a) - \|a-x\| \leqslant \|z-a\| - \|a-x\| \leqslant \|z-x\| = d_F(x)$$

    Toutes les inégalités sont donc des égalités. *Donc,*

$$d_F(x) = \|x-y\|$$

26. (a) $d_F(a) > 0$, puisque $a \notin F$.

$$a - tv = a - \frac{t}{d_F(a)}(a-y) = \left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right)a + \frac{t}{d_F(a)}y \in [a,y] \text{ puisque } \frac{t}{d_F(a)} \in [0,1]$$

Donc, d'après la question 25b,

$$d_F(a-tv) = \|a - tv - y\| = \left\|\left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right)(a-y)\right\| = \left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right)\underbrace{\|a-y\|}_{=d_F(a)} = d_F(a) - t$$

(b) On en déduit que

$$d_F(a) - t = d_F(a-tv) = d_F(a) + \langle u,\, -tv\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(t) = d_F(a) - t\,\langle u,\, v\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(t)$$

Ainsi,

$$-1 = -\langle u,\, v\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\langle u,\, v\rangle = 1$$

Or, $\|u\| \leqslant 1$ (question 24b) et $\|v\| = \frac{\|a-y\|}{d_F(a)} = 1$, puisque $y \in \Gamma(a)$. Donc,

$$1 = \langle u,\, v\rangle \leqslant \|u\|\,\|v\| \leqslant 1$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités :

$$\langle u,\, v\rangle = \|u\|\,\|v\| = 1 \quad \text{et} \quad \|u\| = 1$$

(c) On en déduit que u et v sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Or u et v sont unitaires. *Donc, $u = v$.* Ainsi,

$$y = a - d_F(a)\nabla d_F(a)$$

$\Gamma(a)$ est donc un singleton (puisque l'ensemble est non vide) et

$$\nabla d_F(a) = v = \frac{1}{d_F(a)}(a-y) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$$

Partie VI

27. (a) Comme la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. *Donc M est bien défini.*
Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|y_p - a\| &\leqslant \|y_p - x_p\| + \|x_p - a\|\\ &\leqslant d_F(x_p) + M\\ &\leqslant d_F(a) + |d_F(x_p) - d_F(a)| + M\\ &\leqslant d_F(a) + |x_p - a| + M\\ &\leqslant 2M + d_F(a)\end{aligned}$$

La suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

(b) *Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence de ℓ.*

(c) Quitte à extraire (puisque toute suite extraite de $(x_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a), on peut supposer que $(y_p)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
Par construction, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_p \in E\backslash V$ et $y_p \in F$. Comme V est un ouvert, $E\backslash V$ est fermé. Donc, $F \cap (E\backslash V)$ est fermé (comme intersection de fermés). *On en déduit que $\ell \in F \cap (E\backslash V)$.*

(d) On a
$$\|x_p - y_p\| \xrightarrow[p\to\infty]{} \|a-\ell\| \quad \text{et} \quad \|x_p - y_p\| = d_F(x_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} d_F(a)$$
par continuité de d_F. Ainsi,
$$d_F(a) = \|a-\ell\|$$
Comme $\ell \in F$, on en déduit que $\ell \in \Gamma(a) = \{\pi(a)\} \subset V$, *ce qui est absurde* puisque $\ell \in E\backslash V$. Ainsi,
$$\forall V \in \mathscr{V}(\pi(a)),\, \exists U \in \mathscr{V}(a),\, \forall x \in U,\, \Gamma(x) \subset V$$

28. (a) Comme $a \notin F$, $R = \|a-\pi(a)\| = d_F(a) > 0$.
Pour tout $y \in \overline{B}(a,R) \cap F$, $\|y-a\| \geqslant R$, car $y \in F$, et $\|y-a\| \leqslant R$, car $y \in \overline{B}(a,R)$. Donc, $y \in \Gamma(a) = \{\pi(a)\}$ *i.e.* $y = \pi(a)$. De plus, $\pi(a) \in \overline{B}(a,R) \cap F$. Ainsi,
$$\overline{B}(a,R) \cap F = \{\pi(a)\}$$

(b) i. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(t) = \|y-x\|^2 t^2 - 2\langle y-x,\, a-x\rangle t + \|a-x\|^2 - R^2$$
Comme $\|y-x\|^2 = d_F(x)^2 > 0$ (car $x \notin F$), φ est un trinôme du second degré.
Le produit des racines vaut $\dfrac{\|a-x\|^2 - R^2}{\|y-x\|^2} < 0$, car $0 \leqslant \|x-a\| < R$ puisque $x \in B(a,R)$.
Les racines sont donc de signes opposés.

ii. D'après ce qui précède, φ s'annule au plus une fois sur $[0,1]$. Par ailleurs, $\varphi(0) = \|a-x\|^2 - R^2 < 0$, $\varphi(1) = \|a-y\|^2 - R^2 \geqslant 0$ (car $y \in F$) et φ est continue. Donc φ s'annule sur $[0,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Ainsi, φ s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$, *i.e.* $[x,y] \cap S(a,R)$ *est un singleton.*

iii. Bien évidemment, $\varphi(t_{x,y}) = 0$. $t_{x,y}$ est donc la racine positive de φ. *Ainsi,*
$$t_{x,y} = \frac{\langle y-x,\, a-x\rangle + \sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)}}{d_F(x)^2}$$

(c) On a
$$\begin{aligned}\|p(x,y) - y\| &= (1-t_{x,y})\,\|x-y\| = (1-t_{x,y}) d_F(x)\\ &= \frac{d_F(x)^2 - \langle y-x,\, a-x\rangle - \sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)}}{d_F(x)}\end{aligned}$$
Or,
$$-\langle y-x,\, a-x\rangle \leqslant |\langle y-x,\, a-x\rangle| \leqslant \|y-x\|\,\|a-x\| \leqslant d_F(x)\,\|a-x\|$$
et
$$\sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)} \geqslant \sqrt{d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)} = d_F(x)\sqrt{R^2 - \|a-x\|^2}$$
Donc,
$$\|p(x,y) - y\| \leqslant d_F(x) + \|a-x\| - \sqrt{R^2 - \|a-x\|^2}$$
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme d_F et la norme sont continues et comme $R = d_F(a)$,
$$d_F(u) + \|a-u\| - \sqrt{R^2 - \|a-u\|^2} \xrightarrow[u\to a]{} 0$$

Donc, il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall u \in E, \|u-a\| < \alpha \implies d_F(u) + \|a-u\| - \sqrt{R^2 - \|a-u\|^2} < \varepsilon$$

Ainsi, *si* $\|x-a\| < \alpha$, *alors* $\|p(x,y) - y\| < \varepsilon$.

(d) Soit $V \in \mathscr{V}(\pi(a))$. Il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$B(\pi(a), \delta) \subset V$$

D'après la question 27d, il existe un voisinage $U_1 \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant

$$\forall x \in U_1,\, \Gamma(x) \subset B\left(\pi(a), \frac{\delta}{2}\right)$$

D'après la question précédente, il existe un voisinage $U_2 \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant

$$\forall x \in U_2,\, \forall y \in \Gamma(x),\, \|p(x,y) - y\| < \frac{\delta}{2}$$

Posons $U := U_1 \cap U_2 \in \mathscr{V}(a)$. Alors, pour tout $x \in U$ et tout $y \in \Gamma(x)$,

$$y \in B\left(\pi(a), \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \|p(x,y) - y\| < \frac{\delta}{2}$$

donc

$$\|p(x,y) - \pi(a)\| \leqslant \|p(x,y) - y\| + \|y - \pi(a)\| < \delta$$

d'où

$$p(x,y) \in B(\pi(a), \delta) \subset V$$

29. (a) Soit $x \in B(a,R)$.

$\|x - p(x,y_x)\|^2 = \|x - a + a - p(x,y_x)\|^2 = \|x-a\|^2 + 2\langle x-a,\, a - p(x,y_x)\rangle + \|a - p(x,y_x)\|^2$

Le résultat en découle.

(b) Soit $x \in B(a,R)$.

$$\begin{aligned}\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 &= 2\langle x-a,\, a - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2 \\ &= 2\langle x-a,\, a-\pi(a)\rangle + 2\langle x-a,\, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant

$$\forall x \in B(a,\eta),\, \forall y \in \Gamma(x),\, p(x,y) \in B(\pi(a), \varepsilon)$$

Ainsi, si $x \in B(a, \min(\eta, \varepsilon))$, alors

$2\left|\langle x-a,\, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle\right| + \|x-a\|^2 \leqslant 2\|x-a\|\,\|\pi(a) - p(x,y_x)\| + \varepsilon\|x-a\| \leqslant 3\varepsilon\|x-a\|$

Donc, $2\langle x-a,\, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2 = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$ et

$$\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 = 2\langle x-a,\, a-\pi(a)\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$$

30. Soient $x \in B(a,R)$ et $y_x \in \Gamma(x)$. Comme $p(x,y_x) \in S(a,R)$, $\|a - p(x,y_x)\| = R = d_F(a) = \|a - \pi(a)\|$.

Donc, comme $\|x - p(x,y_x)\| \leqslant d_F(x) \leqslant \|x - \pi(a)\|$,

$$\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 \leqslant d_F^2(x) - d_F^2(a) \leqslant \|x-\pi(a)\|^2 - \|a - \pi(a)\|^2$$

Or,

$$\|x - \pi(a)\|^2 - \|a - \pi(a)\|^2 = 2\langle x-a,\, a-\pi(a)\rangle + \|x-a\|^2$$

Ainsi,

$$d_F^2(x) - d_F^2(a) - 2\langle x-a,\, a-\pi(a)\rangle = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$$

D'où,

$$d_F^2(a+h) = d_F^2(a) + \langle 2(a - \pi(a)),\, h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

31. D'après ce qui précède, d_F^2 est différentiable en a et $\nabla(d_F^2)(a) = 2(a - \pi(a))$.

Comme $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $d_F(a) > 0$, $d_F = u \circ (d_F^2)$ est différentiable en a comme composée de fonctions différentiables et on a

$$\forall h \in E,\ d(d_F)(a)\cdot h = du(d_F^2(a))\cdot(d(d_F^2)(a)\cdot h) = \frac{1}{2\sqrt{d_F^2(a)}} \langle 2(a - \pi(a)),\ h\rangle = \left\langle \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a)),\ h \right\rangle$$

Ainsi,

$$\nabla(d_F)(a) = \frac{1}{d_F(a)}\,(a - \pi(a)) = \frac{1}{\|a - \pi(a)\|}(a - \pi(a))$$

32. D'après la question précédente, d_F est différentiable sur Ω et

$$\forall x \in \Omega, \nabla(d_F)(x) = \frac{1}{\|x - \pi(x)\|}\,(x - \pi(x))$$

D'après la question 27d, π (qui est bien définie sur Ω) est continue sur Ω. Ainsi, ∇d_F est continue sur Ω, donc *d_F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.*

Partie VII

33. Si $a \in \mathring{F}$, d_F est nulle sur un voisinage de a, donc (d_F est différentiable en a et) $\nabla(d_F)(a) = 0$.

34. (a) $d_F(a) = 0$, puisque $a \in F$. Comme d_F est différentiable en a, de gradient égal à u,

$$d_F(a - tu) = d_F(a) + \langle u,\ -tu\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = -t\,\|u\|^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

(b) D'après la question précédente,

$$0 \leqslant d_F(a - tu) = t\left(-\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)\right)$$

En divisant par $t > 0$, on en déduit que

$$0 \leqslant -\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)$$

En passant à la limite, on en déduit que $-\|u\|^2 \geqslant 0$, donc que $\|u\| = 0$. *Ainsi,* $\nabla(d_F)(a) = 0$.