entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents, connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/71/2/s2020_agreg_interne_math_1_1239712.pdf

3.1.1 Présentation du sujet

L'objectif du sujet est d'établir et d'utiliser la décomposition de Bruhat pour le groupe linéaire. Pour une présentation rapide de cette décomposition, nous renvoyons aux notes d'exposé *Bruhat decomposition and applications* données par G. Lusztig, disponibles à l'adresse suivante :

`https://arxiv.org/abs/1006.5004`

La partie I amorce l'étude des drapeaux de sous-espaces vectoriels et permettait de tester les candidats sur les notions d'algèbre linéaire (théorème de la base incomplète, utilisation de la dimension, diagonalisation, trigonalisation, endomorphismes nilpotents). La partie II concerne l'étude des groupes quotients. La notion est illustrée à l'aide du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et d'une réalisation du groupe diédral. La question 12 introduit la notion de double classe. La partie III a pour but d'établir la décomposition de Bruhat (questions 15 à 17). Le début de la partie concerne les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de matrices. Ensuite, on utilise la décomposition LU et les dernières questions traitent de topologie. La partie IV se concentre sur les actions de groupes et se conclut par un dénombrement d'orbites.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet est assez progressif jusqu'à la question 15. Il est possible d'admettre le résultat des questions 15 et 16, qui sont difficiles, pour aborder la topologie et la décomposition LU, ainsi que la partie IV sur les actions de groupes. Les premières parties du sujet sont très proches des points qui figurent au programme du concours. La partie I a été traitée par la plupart des candidats. Les questions les plus abordées ont été ensuite les questions 13 et 14. La partie II a été abordée dans beaucoup de copies. Quelques candidats abordent les quatre parties de manière satisfaisante ; la longueur du sujet est raisonnable.
Le sujet a permis de distinguer les candidats qui savent mettre en place un raisonnement rigoureux et concis.

3.1.3 Commentaires par question

Les commentaires ci-dessous détaillent les erreurs les plus fréquemment rencontrées dans les copies. Les questions peu traitées ne font pas l'objet de commentaire.

Partie I

1 Pour l'inclusion stricte, évoquer que e_{j+1} n'est pas dans $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_j)$ aurait mérité une mention rapide de la liberté de $(e_1, ..., e_n)$. Certains candidats rédigent des récurrences inutiles. Les correcteurs attendent de la concision pour prouver que $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_j)$ est inclus dans $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_{j+1})$.

2 Cette question a été souvent mal comprise. Certains partent déjà de l'existence d'une base adaptée pour prouver qu'elle existe. D'autress évoquent la réunion d'espaces vectoriels $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_j) \cup \text{Vect}\,(e_{j+1})$. Rappelons que la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. L'approche la plus rapide est de commencer par montrer que chaque E_i est nécessairement de dimension i, puis d'utiliser le théorème de la base adaptée. Rappelons que ce théorème permet de compléter des familles libres, et que ce caractère libre est un point à mentionner.

3 La notion de base orthonormée n'est pas toujours maitrisée. Normaliser les vecteurs d'une famille n'est pas suffisant pour orthonormaliser celle-ci. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, beaucoup de candidats oublient de mentionner que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}\,(e_1, ..., e_j) = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j)$, qui est une propriété importante pour répondre à cette question. Affirmer « il suffit d'appliquer Gram-Schmidt » n'est pas une rédaction adaptée.

4 On relève des confusions entre valeurs propres et vecteurs propres ainsi qu'entre coordonnées et vecteurs via la représentation matricielle. La stabilité du drapeau construit n'est parfois pas vérifiée rigoureusement. Des candidats parlent de « base de diagonalisation de u » , mais le jury attend qu'elle soit clairement définie. Par ailleurs, notons que la famille de sous-espaces $F_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$, où E_{λ_i} désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, n'a pas de raison d'être un drapeau *total*. Attention, certains candidats pensent qu'un endomorphisme diagonalisable a nécessairement n valeurs propres distinctes.

5 a) Il convenait de rédiger proprement une récurrence ou un raisonnement par l'absurde. Le fait que la famille $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), ..., u^{n_k}(x))$ soit liée n'implique pas que $u^{n_k}(x)$ s'exprime en fonction des autres vecteurs.

b) L'inclusion stricte des noyaux itérés est rarement justifiée avec rigueur. Certains candidats ont cherché à montrer que la suite des noyaux itérés était stationnaire mais n'ont pas réussi à conclure correctement. Rappelons enfin que l'ordre dans lequel sont donnés les vecteurs d'une base adaptée a son importance.

6 Souvent traitée convenablement. Un raisonnement par double implication est attendu. L'utilisation de la décomposition de Dunford n'est pas nécessaire mais a pourtant été assez souvent mentionnée, avec maladresse.

7 Il est important d'être vigilant sur l'ordre dans lequel on utilise les questions précédentes. On doit d'abord prouver l'existence d'un drapeau stable puis d'une base orthonormée adaptée à ce drapeau.

Partie II

8 a) Des candidats confondent « H distingué dans G » et « tous les éléments de H commutent avec les éléments de G » . Peu ont compris ce que signifiait « on a bien défini ainsi une loi de composition interne » . Il s'agissait de montrer que la multiplication sur G/H est indépendante du représentant choisi. Certains utilisent la caractérisation des sous-groupes, mais ici elle ne permettait pas de conclure car on ne peut pas préciser de quel groupe G/H est un sous-groupe. Attention à bien vérifier toutes les propriétés qui définissent un groupe. En particulier, vérifier que l'on a le même élément neutre à gauche et à droite, de même pour le symétrique. Parfois l'associativité a été oubliée.

b) On peut noter quelques confusions entre injectivité et surjectivité.

9 a) Disposer le calcul matriciel n'était pas suffisant. Il pouvait soit évoquer une propriété de cours, soit redémontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux. Une matrice triangulaire de déterminant 1 n'a pas forcément que des « 1 » sur sa diagonale : cette erreur est fréquemment commise.

b) Quelques erreurs sur l'inverse d'une matrice 2*2.

10 Parfois, les opérations de groupes ont été utilisées sur G/H, alors qu'on ne sait pas si G/H est un groupe. On montre que H est distingué dans G, pour pouvoir dire ensuite (question 11b) que G/H est un groupe. Certains ont bien vu qu'il existe $g \notin H$ tel que G soit réunion disjointe de H et gH, mais il est ensuite trop expéditif d'affirmer qu'un ensemble de la forme Hg' est égal à H ou gH.

11 a) Des notations pour la multiplication des matrices rendent le résultat indistinct du calcul et ne facilitent pas la lecture des copies. Beaucoup ont perdu du temps à établir la table de la loi, alors que pour la stabilité par multiplication, il suffisait de regarder les divers résultats de $A^k B^l A^{k'} B^{l'}$. Par ailleurs ceux qui ont établi la table de la loi ont souvent oublié de préciser que l'inverse restait bien dans Δ. Pour montrer que Δ est stable par inversion, certains se sont contentés de montrer que les matrices sont inversibles, sans vérifier que leurs inverses était bien dans Δ.

b) Une démonstration utilisant la question 10 était attendue. Certains candidats ont reconnu le groupe diédral, mais sans donner d'explication.

c) Cette question a posé beaucoup de problèmes de logique. L'application $A^kB^l \mapsto (A^k, B^l)$ n'est pas un morphisme de groupes entre Δ et $\Gamma \times R$. De plus pour montrer que deux groupes ne sont pas isomorphes, il ne suffit pas d'exhiber une application entre deux groupes qui n'est pas bijective. Une application bijective entre deux groupes n'est pas nécessairement un morphisme de groupes. Certains candidats n'arrivent pas à dénombrer le nombre d'éléments de $\Gamma \times R$ et concluent à l'aide des cardinaux.

12 a) Quelques incompréhensions sur la notion de classe à gauche.

b) Des arguments utilisent la notion de partition des classes à gauche ou de partition des classes à droite. Mais ici la fusion des deux est plus compliquée. Il est préférable de repasser par une relation d'équivalence (mentionnée dans quelques très rares copies).

Partie III

13 a) Souvent la matrice est donnée sans aucune explication.

b) Relation rarement justifiée. Certains ont exprimé P_σ comme blocs de P_{c_j}. Il convient de vérifier la cohérence, toutes les matrices sont de taille n. Quelques candidats affirment que P_σ est la somme des P_{c_j}.

c) Attention, être une matrice orthogonale ne signifie pas être de déterminant 1 ou -1. Certains candidats ont mentionné qu'une matrice orthogonale est la matrice de passage d'une base à une autre, mais il convient de préciser que ce sont des matrices de passages entre bases **orthonormées**. Enfin, certains candidats se sont limités à montrer que les colonnes étaient orthogonales deux à deux sans parler de leur norme.

d) Le lien entre le déterminant et la signature est rarement prouvé. Certains font le lien avec la question 13b) et concluent qu'il faut un nombre pair de cycles de taille paire. Il convient ensuite de faire le lien avec la signature. De nombreuses erreurs sur la signature d'un cycle : un cycle de taille k a pour signature $(-1)^{k-1}$.

14 a) Trop de preuves « avec les mains » en dessinant explicitement des matrices. On attend *a minima* un calcul explicite coefficient par coefficient de $E_{i,j}A$.

b) Des confusions entre les indices i et j. Beaucoup de candidats ne semblent pas connaître le résultat du produit par une matrice de dilatation et écrivent $L_i \leftarrow L_i + (\lambda - 1)L_i$.

c) Cette question est rarement abordée, et souvent mal comprise. La deuxième partie de la question trouve comme réponse des affirmations trop vagues comme « permute les lignes ou les colonnes selon σ » . Une bonne manière d'aborder cette question est d'utiliser une décomposition en produit de transpositions. Cela permet de voir que la « permutation des colonnes » n'est pas la même que la « permutation des lignes » .

15 Quelques tentatives infructueuses. Certains très bon candidats ont néanmoins abordé sérieusement la question.

16 a) La question n'a quasiment pas été abordée. Remarquons pourtant qu'une démarche possible aurait été de commencer par chercher quelles opérations élémentaires (puisque c'est le sujet des questions précédentes) correspondent à des matrices triangulaires supérieures. Cette question pouvait aussi être rapprochée de l'algorithme du pivot de Gauss.

b) Le lien avec la question 15 n'a pas été établi.

17 Quelques oublis pour $c \neq 0$.

18 Question bien traitée quand elle est abordée.