19 Cette question a été assez peu abordée, mais a permis de détecter des lacunes. En particulier, l'ensemble des matrices vérifiant la condition E_2 n'est pas l'image réciproque d'une seule fonction ϕ_k. Des confusions entre intersection et réunion. Attention, on ne peut pas affirmer qu'une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.

20 Trop de calculs matriciels, sans entrer dans les détails des coefficients. À ce stade du problème on peut s'attendre à ce que les candidats qui abordent la question reconnaissent un changement de base.

Pour la continuité (question d), la linéarité en dimension finie est rarement évoquée. Les candidats se contentent d'affirmer que l'expression est « polynomiale en les coefficients » .

Partie IV

22 La compatibilité a donné lieu à des preuves trop vagues. Cette question était l'occasion de faire le lien entre les connaissances d'algèbre linéaire et les rappels et compléments sur les actions de groupes. Elle a permis à certains candidats de montrer du recul sur les notions d'algèbre et d'algèbre linéaire.

23 La différence entre matrice et application linéaire n'est pas toujours claire, donc de nombreuses preuves sont floues. Bien mentionner que l'on considère des matrices dans une base : B_0.

3.1.4 Éléments de correction

Les indications exposées dans cette section proposent aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Elles sont cependant parfois trop succinctes pour constituer un modèle de rédaction répondant à toutes les attentes du jury.

Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

1 On a clairement $E_0 \subsetneq E_1$ car $\dim E_1 = 1$. Soit $j \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. La famille $(e_1, \dots, e_j)$ est extraite de $(e_1, \dots, e_{j+1})$ donc $E_j \subset E_{j+1}$. Les deux familles de vecteurs considérées sont libres donc $\dim E_j = j < \dim E_{j+1} = j+1$, ce qui montre que $E_j \subsetneq E_{j+1}$. Par ailleurs, $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E donc $E_n = E$. Ainsi $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total.

2 On utilise le théorème de la base incomplète. Soit $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ un drapeau total de E. On remarque que la suite $(\dim(E_i))_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ est une suite strictement croissante d'entiers tels que $\dim E_0 = 0$ et $\dim E_n = n$. On a donc nécessairement $\forall i \in [\![0\,;\, n]\!]$ $\dim E_i = i$. Soit $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$. Si $n = 1$ la construction est terminée, sinon $n \geqslant 2$. Soit alors $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Si $(e_1, \dots, e_i)$ est une base adaptée au drapeau $(E_j)_{j \in [\![0\,;\, i]\!]}$ qui est un drapeau total de E_i, alors c'est une famille libre de i vecteurs de E_{i+1}, que l'on complète en une base de E_{i+1}. Comme on l'a remarqué, $\dim E_{i+1} = i+1$ donc la base obtenue est de la forme $(e_1, \dots, e_{i+1})$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est alors une base de $E_n = E$, qui est adaptée au drapeau $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$.

3 D'après le résultat de la question précédente, le drapeau total $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ admet une base adaptée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base. On obtient une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée, telle que $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$. La base othonormée $(e_1, \dots, e_n)$ est donc adaptée au drapeau total $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$.

4 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u. Considérons le drapeau total associé à cette base. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $j \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $x \in E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_j)$. En écrivant $x = \sum_{i=1}^{j} x_i e_i$ on constate que $u(x) = \sum_{i=1}^{j} x_i \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_j) = E_j$. Donc ce drapeau total est stable par u.

5 Soit $x \in E$ vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0$.

a) Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. La famille $(u^{n-k}(x), u^{n-k+1}(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre de k vecteurs. En effet, soit $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1 \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i u^{n-i}(x) = 0$. Alors $u^{k-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i u^{n-i}(x)) = a_k u^{n-1}(x) = u^{k-1}(0) = 0$ et $u^{n-1}(x) \neq 0$ donc $a_k = 0$. De proche en proche, tous les a_i sont nuls et la famille considérée est libre.

b) Pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, on a $\operatorname{Ker} u^i \subset \operatorname{Ker} u^{i+1}$, $\operatorname{Ker} u^0 = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} u^n = E$. Comme $u^{n-i-1}(x) \in \operatorname{Ker} u^{i+1} \setminus \operatorname{Ker} u^i$, on a $\operatorname{Ker} u^i \subsetneq \operatorname{Ker} u^{i+1}$, et $(\operatorname{Ker} u^i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total de E. On en déduit immédiatement que $\dim \operatorname{Ker} u^i = i$ et que la famille $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x)$ est une base adaptée de ce drapeau.

De plus, ce drapeau est bien stable car si $y \in \operatorname{Ker} u^i$ alors $u^i(u(y)) = u(u^i(y)) = u(0) = 0$ donc $u(y) \in \operatorname{Ker} u^i$.

6 Supposons que u est trigonalisable. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Soit $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ le drapeau total défini par cette base. Alors comme la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est triangulaire, on a pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ $u(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$, ce qui montre que le drapeau $(E_i)_{i \in [\![0\,;\, n]\!]}$ est stable par u. Réciproquement, si $(E_i)_{i [\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total stable, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à ce drapeau. Alors la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure et u est trigonalisable.

7 Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace euclidien E. Alors il existe d'après la question précédente un drapeau total de E stable par u, et d'après la question 3 un tel drapeau admet une base adaptée orthonormée. On obtient ainsi une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Partie II : des groupes quotients

8 Soit $H \triangleleft G$.

a) Soit $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $g_i H = g_i' H$ si et seulement si il existe $h_i \in H$ tel que $g_i = g_i' h_i$. Supposons que ce soit le cas. Alors $g_1 H \star g_2 H = g_1 g_2 H = (g_1' h_1 g_2' h_2) H = (g_1' h_1 g_2') H$. Mais comme H est distingué dans G, on a $H g_2' = g_2' H$; ainsi il existe $h \in H$ tel que $h_1 g_2' = g_2' h$. Ceci montre que $h_1 g_2' H \subset g_2' H$ et donc que $g_1 H \star g_2 H \subset g_1' g_2' H$. De manière analogue on obtient l'autre inclusion, et donc la loi proposée est bien définie. C'est clairement une loi de composition interne.

Associativité : soit $g_1, g_2, g_2 \in G$. On a $(g_1 H \star g_2 H) \star g_3 H = g_1 g_2 H \star g_3 H = (g_1 g_2) g_3 H = g_1 (g_2 g_3) H = g_1 H \star (g_2 g_3) H = g_1 H \star (g_2 H \star g_3 H)$.

De plus H est neutre pour la loi de composition, et si $g \in G$, l'élément gH admet pour symétrique $g^{-1} H$; en effet $gH \star H = H \star gH = gH$ et $gH \star g^{-1} H = g^{-1} H \star gH = H$.

b) L'application π est surjective car si $x \in G/H$, il existe $g \in G$ tel que $x = gH$ et on a $\pi(g) = gH$. D'après la question précédente, on a $\pi(g_1 g_2) = g_1 g_2 H = (g_1 H) \star (g_2 H) = \pi(g_1) \star \pi(g_2)$, l'application π est donc un morphisme surjectif de groupes.

9 a) Soit $A \in TU_n^+(\mathbb{K})$ et $P \in T_n^+(\mathbb{K})$. Comme rappelé dans les notations, $T_n^+(\mathbb{K})$ est un groupe. Comme $TU_n^+(\mathbb{K}) \subset T_n^+(\mathbb{K})$, on obtient $P^{-1} A P \in T_n^+(\mathbb{K})$. De plus les coefficients diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures est le produit terme à terme des coefficients diagonaux. En effet, soit $T = (t_{i,j})_{i,j \in [\![1\,;\, n]\!]}$ et $T' = (t'_{i,j})_{i,j \in [\![1\,;\, n]\!]}$ deux matrices triangulaires supérieures. Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Le coefficient d'indice (i, i) de TT' est $TT'[i, i] = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} t'_{k,i}$ mais $t_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $t'_{k,i} = 0$ si $i < k$, donc $TT'[i, i] = t_{i,i} t'_{i,i}$.

Ainsi T^{-1} est triangulaire supérieure et $T^{-1}[i, i] = (T[i, i])^{-1}$. De plus $P^{-1} A P[i, i] = (P^{-1})[i, i] a_{i,i} P[i, i] = P^{-1}[i, i] P[i, i] = 1$ car $a_{i,i} = 1$. Ceci montre que $P^{-1} TU_n^+(\mathbb{K}) P \subset TU_n^+(\mathbb{K})$, donc que $TU_n^+(\mathbb{K}) \triangleleft T_n^+(\mathbb{K})$.

b) Si $n=1$, la réponse est oui, mais si $n \geqslant 2$ la réponse est non. On a par exemple en posant $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $T_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in T_2^+(\mathbb{K})$ et $T_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in T_2^-(\mathbb{K})$, on a

$$P^{-1}T_1P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=T_2$$

et on construit un contre-exemple par blocs à partir de celui-ci pour $n \geqslant 3$ en remarquant que

$$\left(\begin{array}{c|c}P^{-1}&0\\\hline 0&I_{n-2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}T_1&0\\\hline 0&I_{n-2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}P&0\\\hline 0&I_{n-2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}T_2&0\\\hline 0&I_{n-2}\end{array}\right).$$

10 Comme G/H a deux éléments, on a déjà $H\neq G$. Soit $g\in G\smallsetminus H$. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors les classes d'équivalences constituent une partition de E. Ici, les classes à gauche et à droite constituent une partition de G donc on a $G=H\cup gH=H\cup Hg$, les réunions étant disjointes. On en déduit que $gH=Hg$ et donc que $H\lhd G$.

11 a) On a $\Delta\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, car par exemple les matrices A et B sont de déterminant non nul. On a aussi clairement $I_2\in\Delta$. On remarque que $A^4=B^2=I_2$. On a $BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=A^3B$, donc $BA^2=A^3BA=A^6B=A^2B$ et $BA^3=A^9B=AB$. Soit $k,k'\in[\![0\,;3]\!]$ et $l,l'\in[\![0\,;1]\!]$. Soit $C=A^kB^lA^{k'}B^{l'}$. Si $l=0$ on a $C=A^{k+k'}B^{l'}=A^rB^{l'}\in\Delta$ où r est le reste dans la division euclidienne de $k+k'$ par 4. Si $l=1$ on a de la même manière, grâce aux calculs que l'on vient de faire $C\in\Delta$, ce qui montre que Δ est stable par multiplication. Par ailleurs, l'inverse de A^k est $A^{4-k}\in\Delta$, l'inverse de B est $B\in\Delta$, l'inverse de AB est $BA^3=AB$, l'inverse de A^2B est $BA^2=A^2B$ et l'inverse de A^3B est $BA=A^3B$. Δ est donc stable par passage à l'inverse.

Ainsi Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $C\in\Delta$. Les calculs effectués à la question précédente montrent que $C\Gamma=\{CA^k\mid k\in[\![0\,;3]\!]\}=<A>$ ou $C\Gamma=\{B,AB,A^2B,A^3B\}=<A>B$. Ainsi l'ensemble Δ/Γ possède exactement deux éléments, et d'après la question 3.1.4, $\Gamma\lhd\Delta$. D'après les rappels, dans ce cas Δ/Γ peut être muni d'une structure de groupe. Il n'y a qu'un seul groupe à deux éléments à isomorphisme près, donc Δ/Γ et R sont isomorphes ; un isomorphisme pourrait être donné explicitement par $<A>\mapsto I_2$ et $<A>B\mapsto B$.

c) On a vu que $BA\neq AB$ donc Δ n'est pas abélien, alors que puisque Γ et R sont cycliques (donc abéliens), le groupe $\Gamma\times R$ est abélien. Ainsi Δ et $\Gamma\times R$ ne sont pas isomorphes.

12 a) On a $HgK=\bigcup_{h\in H}hgK=\bigcup_{k\in K}Hgk$ donc une réunion de classes à gauches et une réunion de classes à droite.

b) La relation binaire $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow HxK=HyK\Leftrightarrow \exists h\in H,\ \exists k\in K,\ y=hxk$ est une relation d'équivalence. Elle est en effet :

- Réflexive : soit $x\in G$, $x\mathcal{R}x$ car $x=1_Gx1_G$.
- Symétrique : soient $x,y\in G$, tels que $x\mathcal{R}y$. Il existe $h\in H$ et $k\in K$ tels que $y=hxk$ donc $x=h^{-1}xk^{-1}$ et $y\mathcal{R}x$.
- Transitive : soient $x,y,z\in G$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe $h,h'\in H$ et $k,k'\in K$ tels que $y=hxk$ et $z=h'yk'$. Alors $z=h'hxkk'$ donc $x\mathcal{R}z$.

On a utilisé à chaque fois le fait que H et K étaient des sous-groupes de G.

Les classes d'équivalence pour cette relation sont les doubles classes, ce qui prouve que l'ensemble des doubles classes constitue une partition de G.

Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

13 a) Pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$ on a $u_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i+1}$ et $u_\sigma(\varepsilon_n) = \varepsilon_1$. Ainsi pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, la colonne de coordonnées de $u(\varepsilon_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ est constituée de 0 sauf à la i-ème position, qui est un « 1 ». La colonne de coordonnées de $u(\varepsilon_n)$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

On en déduit que $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a $u_{c_1 \circ \dots \circ c_k}(\varepsilon_i) = \varepsilon_{c_1 \circ \dots \circ c_k(i)} = \varepsilon_{\sigma(i)}$. On en déduit que $u_\sigma = u_{c_1 \circ \dots \circ c_k}$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $P_\sigma = P_{c_1} \times \dots \times P_{c_k}$.

c) Les colonnes de P_σ constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; en effet dans une matrice P_σ tous les coefficients sont nuls sauf un, qui vaut « 1 » et qui est aussi le seul coefficient non nul de sa ligne, donc P_σ est orthogonale.

d) On peut par exemple revenir à la définition du déterminant, pour voir que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$, où ε désigne la signature. En effet, si on note $p_{i,j}$ les coefficients de P_σ, on a $\det(P_\sigma) = \sum\limits_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) \prod\limits_{k=1}^{n} p_{s(k),k}$. Si $s \neq \sigma$ il existe $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $s(k) \neq \sigma(k)$ et donc $p_{s(k),k} = 0$. Dans ce cas $\prod\limits_{k=1}^{n} p_{s(k),k} = 0$ et tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls, sauf celui pour $s = \sigma$. Ceci donne $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{k=1}^{n} p_{\sigma(k),k} = \varepsilon(\sigma)$.

Ainsi

$$P_\sigma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma \in \mathfrak{A}_n,$$

où $\mathfrak{A}_n$ désigne le groupe alterné.

14 a) Notons $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l}$ le coefficient d'indice (k,l) de la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$. On a $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l} = \sum\limits_{m=1}^{n} [T_{i,j}(\lambda)]_{k,m}[A]_{m,l}$

Si $k \neq i$ alors $[T_{i,j}(\lambda)]_{k,m} = \delta_{k,m}$ donc $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l} = [A]_{k,l}$ et la ligne k n'est pas modifiée.

Si $k = i$ alors $[T_{i,j}(\lambda)]_{i,m} = 1$ lorsque $m = i$ et λ lorsque $m = j$ donc $[T_{i,j}(\lambda)A]_{i,l} = [A]_{i,l} + \lambda[A]_{j,l}$

b) De manière analogue, on voit que $D_i(\lambda)A$ correspond à l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, que $AD_i(\lambda)$ correspond à $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $AT_{i,j}(\lambda)$ à $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

c) On obtient respectivement $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$. La matrice $P_\sigma A$ s'obtient en permutant les lignes de A ; la i-ième ligne de $P_\sigma A$ est la $\sigma^{-1}(i)$-ième ligne de A. La matrice AP_σ s'obtient en permutant les colonnes de A : la j-ième colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ième colonne de A.

15 Soit $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$. La matrice $UP_{\sigma'}$ s'obtient en permutant les colonnes de U : la j-ième colonne de $UP_{\sigma'}$ est la $\sigma'(j)$-ième colonne de U. De même, la matrice $P_\sigma V$ s'obtient en permutant les lignes de V ; la i-ième ligne de $P_\sigma V$ est la $\sigma^{-1}(i)$-ième ligne de V. Ainsi les coefficients d'indice (i,j) de $UP_{\sigma'}$ sont nuls pour $i > \sigma'(j)$. Or le coefficient d'indice $(\sigma(j), j)$ de $P_\sigma V$, qui est le coefficient d'indice (j,j) de V n'est pas nul car V est inversible. On en déduit que pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\sigma(j) \leqslant \sigma'(j)$. De manière analogue, on montre que pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a $\sigma'(i) \leqslant \sigma(i)$ donc $\sigma = \sigma'$.

16 a) Soit A une matrice inversible. Montrons qu'il existe une matrice U triangulaire supérieure unipotente, une matrice V triangulaire supérieure et une matrice de permutation (et non de transposition) P_σ telles que $A = UP_\sigma V$. Comme $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est inversible, l'un au moins des coefficients de sa première colonne n'est pas nul. Soit $i_1 = \max\{k \in [\![1\,;\,n]\!]\,,\ a_{k,1} \neq 0\}$. On effectue pour tout $i \in [\![1\,;\,i_1]\!]$ l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$ en multipliant à gauche par une matrice triangulaire supérieure unipotente (obtenue comme produit de matrices de transvections). On effectue $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} C_1$ puis pour $j \in [\![2\,;\,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - a_{i_1,j} C_1$ ce qui se fait en multipliant à droite par des matrices triangulaires supérieures (produit de matrices de transvections et de dilatation). On obtient alors une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$$

On recommence ce type d'opérations sur les colonnes suivantes. On remarque que $i_2 = \max\{k \in [\![1\,;\,n]\!]\,,\ a_{k,2} \neq 0\} \neq i_1$. Après le traitement de la dernière colonne, on obtient une matrice de permutation ne contenant qu'un seul « 1 »par ligne et par colonne.Ceci prouve que $U'AV' = P_\sigma$ avec U' et V' respectivement triangulaire supérieure unipotente et triangulaire supérieure car produits de telles matrices. Ainsi $A = UP_\sigma V$.

Remarque : Comme V est obtenue comme produit de matrices de dilatation et de transvection, c'est une matrice inversible. Ceci explique pourquoi, dans la question suivante et dans l'inclusion annoncée dans l'énoncé $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} T_n^+(\mathbb{K}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{K})$, on ne fait intervenir que des matrices triangulaires supérieures *inversibles*.

b) Si $UP_\sigma V = U'P_{\sigma'}V'$ avec U, U', V, V' triangulaires supérieures inversibles, alors $P_{\sigma'}^{-1} U'^{-1} U P_\sigma = V'V^{-1}$. D'après la question 3.1.4 on a donc $\sigma = \sigma'$ car $U'^{-1}U$ et $V'V^{-1}$ sont triangulaires supérieures inversibles.

17 Si $c = 0$ on obtient

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Sinon on suit l'algorithme décrit à la question précédente et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -c^{-1} \end{pmatrix}$$

Détail de l'algorithme, en notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque $c \neq 0$:

a) Annuler la première sur colonne en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{c} L_2$. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

le coefficient en haut à droite de cette matrice est $b - \frac{ad}{c} = -\frac{1}{c}$ car $ad - bc = 1$.

b) Effectuer les opérations $C_1 \leftarrow \frac{1}{c} C_1$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - dC_1$ qui donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Enfin, $C_2 \leftarrow -cC_2$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On en déduit que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & d \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Puis la décomposition voulue en inversant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & d \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

18 a) Si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_1)$, alors A est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible. Si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_2)$, alors tous les mineurs principaux de A sont non nuls, en particulier le mineur d'ordre n, autrement dit $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.

b) Soit A une matrice satisfaisant la propriété $(\mathbf{E}_1)$. On écrit $A = UV$ avec $U \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $V \in T_n^+(\mathbb{C})$. Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$. On écrit par blocs :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & U_3 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

où $U_1 \in T_k^-(\mathbb{C})$, $U_3 \in T_{n-k}^-(\mathbb{C})$, $V_1 \in T_k^+(\mathbb{C})$ et $V_3 \in T_{n-k}^+(\mathbb{C})$. Alors

$$A = UV = \begin{pmatrix} U_1V_1 & U_1V_2 \\ U_2V_1 & U_2V_2 + U_3V_3 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que le k-ème mineur principal de A est $\det(U_1V_1) = \det(U_1)\det(V_1) \neq 0$.

c) Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que l'implication $(\mathbf{E}_2) \Rightarrow (\mathbf{E}_1)$ est vraie pour toutes les matrices d'ordre au plus $n-1$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & a \end{pmatrix}$$

où $A_1 = U_1V_1$ avec $U_1 \in T_{n-1}^-(\mathbb{C})$ et $V_1 \in T_{n-1}^+(\mathbb{C})$. On cherche $U \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $V \in T_n^+(\mathbb{C})$ par blocs, sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ B & b \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & C \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

vérifiant $A = UV$, autrement dit $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et :

$$\begin{cases} U_1V_1 & = A_1 \\ U_1C & = A_2 \\ BV_1 & = A_3 \\ BC + bc & = a \end{cases}$$

Les mineurs principaux de A_1 sont non nuls, on sait donc par hypothèse qu'il existe U_1 et V_1 tels que $U_1V_1 = A_1$ avec U_1 triangulaire inférieure et V_1 triangulaire supérieure inversibles d'ordre $n-1$. Ces matrices U_1 et V_1 étant inversibles, le système $U_1X = A_2$ admet une unique solution $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et le système ${}^tV_1\,{}^tY = {}^tA_3$ admet une unique solution $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$. Si l'on pose $b = 1$ et $c = a - BC$ on a trouvé une décomposition $A = UV$ satisfaisant les conditions cherchées.

Remarquons que le choix de $b = 1$ permet de montrer que l'on peut imposer par exemple à la matrice triangulaire inférieure de n'avoir que des 1 sur sa diagonale.

19 Les applications ϕ_k introduites par l'énoncé sont des fonctions polynomiales en les coefficients de A, donc continues. Les matrices satisfaisant la relation $(\mathbf{E}_2)$ sont les éléments de l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \varphi_n^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et que les φ_k sont continues, les $\varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ sont des ouverts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; on a donc une intersection finie d'ouverts de $GL_n(\mathbb{C})$, c'est un ouvert de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

20 a) On remarque que $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$, donc que $P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}} = P_\tau$. Soit $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est T. Alors la matrice de $P_\tau T P_\tau$ est celle de f dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_{\tau(1)}, \ldots, \varepsilon_{\tau(n)})$. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Alors, en posant $i = n - j + 1$, on a $f(\varepsilon_{\tau(k)}) = f(\varepsilon_{n-k+1}) = \sum\limits_{j=1}^{n-k+1} t_{j,n-k+1}\varepsilon_j = \sum\limits_{i=k}^{n} t_{n-i+1,n-k+1}\varepsilon_{\tau(i)}$, ce qui montre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire inférieure, et reste inversible puisque T l'était. Ceci prouve que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^-(\mathbb{C})$. De manière analogue, on montre que $P_\tau T_n^-(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^+(\mathbb{C})$ et donc que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C})$.

b) D'après la question a), $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C})$ donc $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$. D'après les questions 18 c) et 3.1.4, cet ensemble est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

c) De manière analogue à la question précédente, on utilise le fait que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$. On raisonne alors de la même manière que pour prouver la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A^{(k)} = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1\,;\,k]\!]}$ les matrices extraites à considérer. Le spectre S_k des $A^{(k)}$ est fini donc leur réunion $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ aussi. Comme A est inversible, 0 n'est pas dans le spectre de A, donc S est un ensemble fini de complexes non réduit à $\{0\}$. On peut donc considérer $\lambda = \min\{|s|\,,\ s \in S \setminus \{0\}\}$. Dans ce cas, pour tout $p > \frac{1}{\lfloor|\lambda|\rfloor}$, on a $A - \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui satisfait la condition $(\mathbf{E}_2)$. On a ainsi exhibé une suite de matrices de $T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$ qui converge vers A.

d) L'application $A \mapsto P_\tau A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, $A \mapsto P_\tau A$ est continue. Cette application est de plus clairement involutive, donc bijective et de réciproque continue. C'est un homéomorphisme.

e) Comme l'application $A \mapsto P_\tau A$ est un homéomorphisme, $T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après la question 3.1.4, l'ensemble $\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbb{C}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{C})$ est son complémentaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et c'est donc un fermé d'intérieur vide.

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

21 On définit bien ainsi une action car si $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \Delta$, on a $\mathrm{Id}_E \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ et si $g, h \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g \cdot (h \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}) = (g \circ h) \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$.

Soit $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ alors l'application linéaire g admet la matrice I_n pour matrice dans la base $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ donc $g = \mathrm{Id}_E$. Tous les stabilisateurs sous l'action sont réduits au neutre : l'action est fidèle.

Soit $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ et $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ deux bases de E. On sait qu'il existe un automorphisme de E qui envoie la base $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ sur la base $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$. Ceci montre que l'action définie dans cette question est transitive.

22 On vérifie ici aussi que l'on définit bien une action de groupe, en particulier que si $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $(E_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$, alors $(g(E_i))_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$.

Soit $(E_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]}, (F_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$. On vérifie de même qu'à la question précédente qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g \cdot (E_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]} = (F_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]}$ en considérant l'automorphisme qui envoie une base adaptée sur une base adaptée, ce qui donne à la fois la transitivité et la compatibilité des actions.

23 Soit g un automorphisme élément du stabilisateur de $\delta(B_0)$.

Comme pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, on a g qui laisse stable $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$, la matrice de g dans la base B_0 est triangulaire supérieure et inversible car g l'est. Réciproquement, si g est un automorphisme dont la matrice est triangulaire dans la base B_0, alors g stabilise $\delta(B_0)$, par compatibilité des actions sur $\mathcal{D}$ et sur Δ.

24 La relation $\mathcal{R}$ est

— Réflexive : soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M^{-1}M = I_n \in T_n^+(\mathbb{K})$.

— Symétrique : soit $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors $N^{-1}M = (M^{-1}N)^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

— Transitive : soit $M, N, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $N^{-1}P \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors $M^{-1}NN^{-1}P = M^{-1}P \in T_n^+(\mathbb{K})$.

25 a) C'est une conséquence de la question 3.1.4 : Si M et N sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont telles que $\overline{M} = \overline{N}$, alors il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $N = MT$. Alors $N \cdot \delta(B_0) = M \cdot T \cdot \delta(B_0) = M \cdot \delta(B_0)$.

b) Comme on l'a vu, l'application $M \mapsto M \cdot (\delta(B_0))$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est surjective car l'action est transitive (question 3.1.4). Le passage au quotient φ rend cette application injective d'après la question 3.1.4 : si $\varphi(\overline{M}) = \varphi(\overline{N})$, alors $M^{-1}N \cdot \delta(B_0) = \delta(B_0)$ et $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$ donc $\overline{M} = \overline{N}$.

L'application φ est donc injective et surjective.

26 On a pour $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(\overline{XY}) = (XY) \cdot \delta(B_0) = X \cdot (Y \cdot \delta(B_0)) = X \cdot \varphi(\overline{Y})$.

27 Soit $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et U, V deux matrices triangulaires supérieures inversibles, P_σ une matrice de permutation, telles que $X^{-1}Y = UP_\sigma V$. On a en utilisant le fait que l'on travaille dans le quotient par $T_n^+(\mathbb{K})$:

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = X \cdot (\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}) = X \cdot (\overline{I_n}, \overline{UP_\sigma V}) = XU \cdot (\overline{U^{-1}}, \overline{P_\sigma V}) = XU \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$$

Si de plus il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ tels que

$$(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = A \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}) = (\overline{A}, \overline{AP_{\sigma'}})$$

alors $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ et il existe T une matrice triangulaire supérieure telle que $AP_{\sigma'} = P_\sigma T$. Comme la permutation de la décomposition de Bruhat est unique (ou en invoquant directement la question 15), on en déduit que $\sigma = \sigma'$.

28 On vient de montrer que pour tout $(\overline{X}, \overline{Y}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ il existait un unique couple $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$ dans l'orbite de $(\overline{X}, \overline{Y})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, l'ensemble des orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ est en bijection avec $\{(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}),\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ donc possède $n!$ éléments.