3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/73/4/s2019_agreg_interne_math_2_1067734.pdf

3.2.1 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble, les candidats admissibles ont traité les deux premières parties, certains ayant trouvé un second souffle sur la partie VI, plus applicative. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

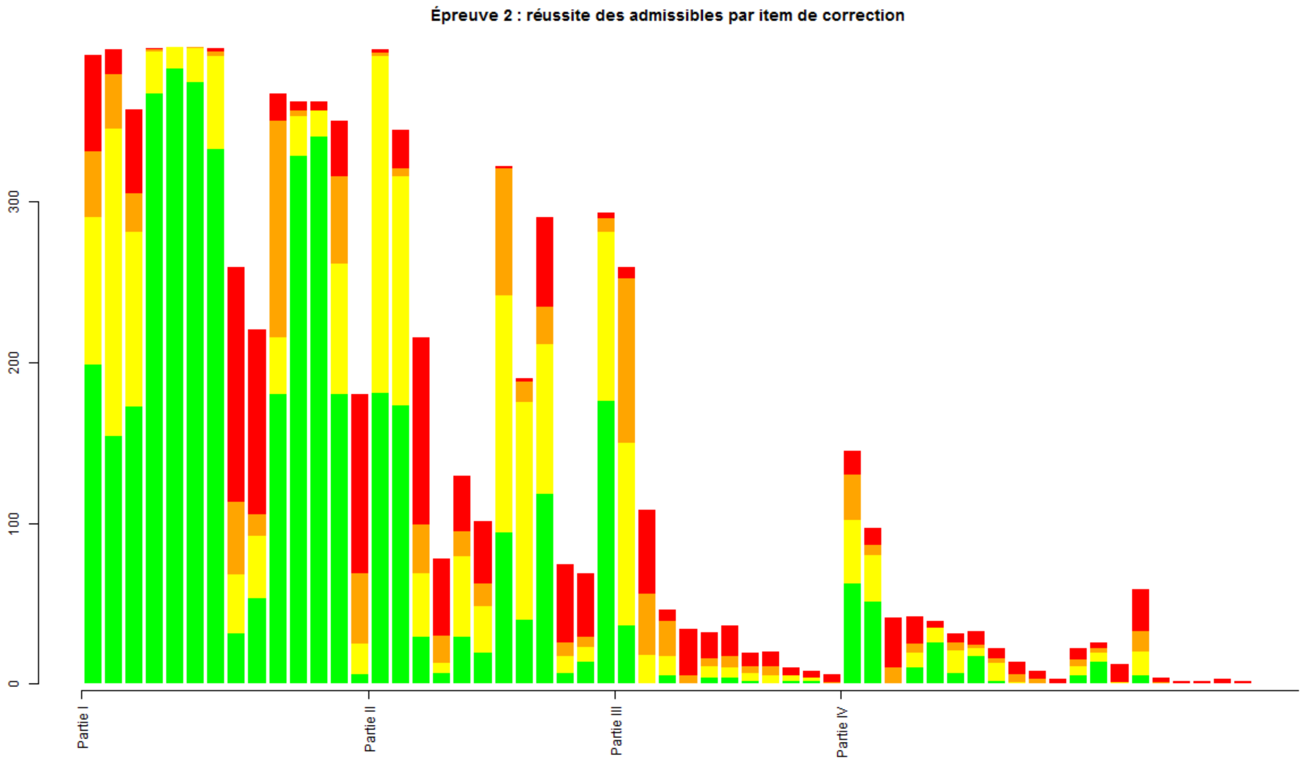

FIGURE 3.2 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.2.2 Présentation du sujet

La deuxième épreuve porte sur une extension de la notion de dérivation d'une fonction à un ordre indicé par un réel et non par un entier (la dérivation négative correspondant à une primitivation). Cet outil, improprement appelé *dérivation fractionnaire*, est appliqué à une généralisation de la famille des polynômes orthogonaux d'Hermite.

- La partie I introduit la famille des polynômes orthogonaux d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'étude est menée dans le cadre préhilbertien naturel pour cette famille.
- La généralisation de la notion de dérivation nécessite des résultats sur la fonction Γ, ce qui est l'objet de la partie II.
- La partie III introduit sur certains espaces de fonctions la notion de dérivation indicée sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, la partie IV propose de généraliser la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(H_s)_{s\in\mathbb{R}}$ à l'aide de l'outil mis en place à la partie précédente. On vérifie alors que des propriétés classiques de la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établies à la partie I s'étendent naturellement à la famille $(H_s)_{s\in\mathbb{R}}$.

3.2.3 Remarques générales

Le sujet couvre une partie importante du programme d'analyse : espaces préhilbertiens, intégration simple et multiple, séries de fonctions et équations différentielles. Il valorise les candidats qui se sont bien préparés au concours avec une première partie très classique, largement traitée et dont les dernières questions se sont révélées discriminantes pour l'admissibilité. La deuxième partie, également abordée par de nombreux candidats, était essentiellement composée de questions discriminantes. La partie III, plus technique et délicate, n'a été que peu traitée, contrairement à la dernière partie dans laquelle certains candidats se sont engagés avec profit.

Le ressenti général des correcteurs est qu'il y avait peu de copie très faibles et que de nombreux candidats ont résolu avec succès un nombre assez important de questions.

Le sujet supposait une bonne maîtrise des définitions ou théorèmes suivants :

- la définition d'une fonction intégrable sur un intervalle (ne pas oublier l'hypothèse de continuité par morceaux) ;
- les intégrales de référence et théorèmes de comparaison ;
- le procédé d'orthogonalisation de Schmidt ;
- le théorème concernant les fonctions continues positives dont l'intégrale est nulle (la conclusion étant fausse en l'absence de continuité...) ;
- la définition d'un produit scalaire (en particulier le caractère défini positif) ;
- la dimension et la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$;
- le théorème de Rolle ;
- le théorème de convergence dominée et ses déclinaisons : continuité/dérivation d'une intégrale à paramètre...
- le théorème de Fubini-Tonelli pour les intégrales doubles.

3.2.4 Commentaires par question

PARTIE I : POLYNÔMES ORTHOGONAUX D'HERMITE

1. (a) Cette question a souvent été mal traitée... Elle avait pourtant comme but de proposer une entrée en matière que devrait maîtriser tout candidat bien préparé au concours...
   Par exemple, on a trop souvent lu que la continuité entraînait l'intégrabilité, ce qui est faux sur un intervalle non borné. A contrario, l'absence de continuité (éventuellement par morceaux) était pénalisante dans le cadre du programme.
   On a relevé des justifications erronées telles que $P(x)Q(x)\mathrm{e}^{x^2} \sim \mathrm{e}^{x^2}$ ou pire, $\mathrm{e}^{-x^2} = (\mathrm{e}^{-x})^2$.
   Chaque année, de nombreux candidats pensent que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable.
   Cette liste est loin d'être exhaustive. Rappelons pour finir que l'intégrabilité se vérifie sur le module d'une fonction, une majoration de la fonction (non positive ici) ne saurait suffire.

   (b) Cette question a révélé qu'une partie importante des candidats ne connaissait pas la définition d'un produit scalaire. Pour certains, c'est juste une forme bilinéaire symétrique.
   À noter que trop de candidats désirant établir le caractère défini positif du produit scalaire omettent la continuité de la fonction, en plus de sa positivité, pour conclure. Il faut être conscient que c'est sur ce type de difficulté que les correcteurs peuvent estimer la rigueur mathématique des candidats.

2. Une minorité de candidat pense à appliquer le procédé de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Celui-ci est au programme, il n'est pas nécessaire de l'établir à nouveau.
   À noter que quelques candidats ne sont pas étonnés de démontrer que la base canonique est othonormale...

3. Ces questions ont été plutôt réussies, les candidats ont bien pensé à exploiter la relation précédente. Un détail toutefois : la démonstration naturelle de **3.(a)** ne reposait pas sur une récurrence, un argument direct suffisait. Les correcteurs sont sensibles à ces "détails".

4. Cette question a été peu abordée. Une erreur parfois relevée a été de conclure après avoir établi l'égalité $< H_{n+1}, H_n >= 0$.
   C'est dommage car une démonstration classique résulte d'un mécanisme assez général, issu de l'étude des polynômes orthogonaux usuels (Legendre, Laguerre, Hermite), que les candidats à l'agrégation ont dû croiser dans leur préparation. Une autre démonstration, plus spécifique aux polynômes d'Hermite, est indiquée dans les éléments de correction à suivre.

5. Cette question a été très peu traitée.
   Pour ce qui a été lu, attention toutefois à maîtriser les arguments. Une implication telle que « $< H_n, Q_n >=< \lambda Q_n, Q_n >$ donc $H_n = \lambda Q_n$ » ne met pas le correcteur dans les meilleures dispositions pour corriger les questions à venir.

6. Cette question un peu technique a été plutôt bien abordée par nombre de candidats. Bien entendu, comparer les coefficients dominants pour en déduire α_n ne constituait pas une démonstration suffisante.

7. Les calculs à mener dans cette question sont en général bien effectués.

8. Même remarque.

9. Trop de réponses décevantes sur cette question pourtant accessible en regardant les premiers termes. Cela dit, bien qu'ayant calculé les quatre premiers polynômes, certains candidats veulent montrer que H_n est pair pour tout n.
   Dans un style faussement logique on a vu démontrer que « H_n pair pour tout n » est absurde, de même pour « H_n impair pour tout n ». Donc H_n n'est ni pair ni impair !
10. Cette question plus délicate, et mise en fin de première partie, n'a été traitée que rarement et bien résolue de manière exceptionnelle.

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

11. La question a été plutôt réussie avec un bémol : alors que la borne $+\infty$ a souvent été traitée avec utilisation d'une limite lors de l'intégration par partie, cela n'a été que trop rarement le cas pour la borne 0^+.
12. C'est une question souvent réussie avec parfois un oubli concernant la continuité de Γ pour justifier la limite au point 1.
13. Cette question plus délicate a souvent posé problème. Une erreur assez répandue consiste à dériver l'équivalent de $\Gamma(x)$ en 0 pour obtenir celui de $\Gamma'(x)$...
14. (a) Cette question de compréhension a fait fuir les candidats. C'est dommage car elle était très abordable.
    (b) De même car la résolution s'appuyait sur la question précédente.
    (c) La convexité de la fonction Γ est plutôt bien établie. La suite de la question est trop souvent bâclée.
    En particulier, peu de candidats pensent au théorème de Rolle. Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et non d'unicité.
    (d) À noter que les représentations graphiques sont parfois bien éloignées de ce qui est proposé sur le tableau de variations.
15. (a) Très peu de candidats remarquent une impropriété si $x < 1$ ou $y < 1$. Pour les candidats qui voient le problème, on retrouve souvent les difficultés de la question **1** concernant l'intégrabilité.
    (b) Cette question assez technique n'a été que très peu abordée.
    (c) Le constat est identique, en dépit d'un niveau de difficulté très raisonnable.
    (d) L'intégrale de Gauss est au programme, il est donc tout à fait légitime de l'utiliser sans la redémontrer. Mieux vaut toutefois éviter « on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ » sans citer Gauss ou le lien avec la loi normale.
    Cette question a été assez souvent réussie en s'appuyant sur les questions précédentes, ce qui est licite.

Partie III : Une généralisation de la notion d'intégration

16. Nous ne reviendrons pas sur les problèmes spécifiques que soulève la notion d'intégrabilité. Plus spécifiquement, les candidats ont trop rarement vu qu'il y avait un problème potentiel en x. Par ailleurs, on lit trop souvent $f(u) = o(e^{\alpha u})$ entraîne $(x-u)^{-s-1}f(x-u) = o(e^{\alpha u})$ au voisinage de $-\infty$, alors que s est négatif (et x fixé).

17. On attend pour la première fois un théorème fort (continuité d'une intégrale à paramètre). Très peu de candidats se rendent compte de sa nécessité ici.
La décroissance exponentielle, lorsque x tend vers $+\infty$, n'a quasiment jamais été abordée convenablement.

18. Question abordable mais très peu traitée.

19. Cette question bien plus délicate n'a quasiment pas été traitée.

20 à 24 Peut-être découragés par la question précédente, les candidats ont généralement préféré ne pas aborder ces questions, et passer à la suite.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

25 Parmi les copies traitant cette question, rares sont celles qui font le lien avec les polynômes d'Hermite étudiés à la partie I.
Certains candidats refont même une démonstration par récurrence pour prouver que $\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) = P_n(x)e^{-x^2}$ avec P_n un polynôme.

26 On constate souvent une confusion entre les notations $D^{(m)}(\mathrm{e}^{-x^2})(x-u)$ et $D^{(m)}(\mathrm{e}^{-(x-u)^2})$.

27 à 38 Malgré la présence de nombreuses questions abordables sur des thèmes classiques (équations différentielles ou séries entières), la fin du problème n'a été que trop rarement abordée pour permettre des commentaires pertinents.
À noter toutefois que la question **37.(a)** a parfois été abordée mais souvent avec un outil mal adapté dans le cas présent. Le critère spécial des séries alternées ne peut s'appliquer facilement puisque la décroissance en module n'est assurée qu'à partir d'un certain rang qui dépend de la variable t. Un reste de Taylor était une piste plus prometteuse.

3.2.5 Éléments de correction