Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) L'application $x \mapsto P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par limite comparée, est négligeable devant $x \mapsto e^{-|x|}$ au voisinage de $\pm\infty$, ce qui assure le résultat.

   (b) Les propriétés usuelles de l'intégrale permettent de vérifier aisément que $<\ ,\ >$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}[X]^2$. Elle est définie positive car une fonction positive, continue et d'intégrale nulle est nulle.

2. On applique le procédé de Schmidt à la base canonique de $(\mathbb{R}[X], <\ ,\ >)$.

3. (a) On écrit $H_{n+1}(x) = e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H_n(x)e^{-x^2}) = -2xH_n(x) + H_n'(x)$.

   (b) Il vient : $H_0 = 1$, $H_1 = -2X$, $H_2 = 4X^2 - 2$, $H_3 = -8X^3 + 12X$.

   (c) Il suffit d'utiliser la formule récurrente de **3.(a)** et l'initialisation en **3.(b)**.

   (d) Toujours par récurrence **3.(a)** et **3.(b)**, le polynôme H_n est de degré n et son coefficient dominant vaut $(-1)^n 2^n$.

4. Pour $m < n$, un mécanisme assez général consiste à écrire : $< H_m, H_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx$ et on intègre par parties $m+1$ fois le terme $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ en dérivant $m+1$ fois le polynôme H_m.

   Dans le cas présent, il est possible de procéder autrement avec **3.(a)** :

   $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad < H_n, H_m >=< -2xH_{n-1} + H_{n-1}', H_m >= - < H_{n-1}, H_m' >$$

   car $\int_{-\infty}^{+\infty} 2xH_{n-1}(x)H_m(x)e^{-x^2}dx =< H_{n-1}', H_m > + < H_{n-1}, H_m' >$ en intégrant par parties.

   La propriété "$< H_n, H_m >= 0$ pour $m < n$" est facile à vérifier lorsque $n = 1$ et $n = 2$. On la suppose vraie jusqu'à un ordre $n - 1 \geqslant 1$, l'égalité précédente permet de conclure à l'ordre n puisque $H_{m-1}' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ est orthogonal à H_{n-1} par hypothèse de récurrence.

5. H_n et Q_n sont dans le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est une droite vectorielle.

6. On connaît l'égalité $H_n'(x) = -2xH_n(x) + H_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k H_k$.

   Par orthogonalité, et puisque $< xP(x), Q(x) >=< P(x), xQ(x) >$, il vient $\beta_k = 0$ si $k \leqslant n-2$. En identifiant les coefficients dominants, on trouve $\beta_{n-1} = \alpha_n = -2n$.

   Une autre démonstration est possible en exploitant l'égalité **3.(a)** différemment :

   $$H_n' = 2xH_n + e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right) = 2xH_n + e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(-2xe^{-x^2}\right) = -2nH_{n-1}$$

   grâce à la formule de Leibniz.

7. On a $H_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_n(x)$ d'après **6.**, et $H_{n+1}'(x) = -2H_n - 2xH_n' + H_n''$ par **3.(a)**, d'où le résultat.

8. C'est encore une application directe des questions **3.(a)** et **6.**.

9. D'après la question **8.** et l'initialisation **3.(b)**, H_n possède la parité de n.

10. Il s'agit d'une propriété générique des polynômes orthogonaux liée au théorème des moments de Hausdorff.

    Raisonnons par l'absurde. Si $x_1 < \ldots < x_p$ sont les racines réelles de multiplicité impaire de H_n. On a $p < n$ par hypothèse, et on pose $P(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(x - x_k)$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2} H_n(x)P(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle car égale à $< H_n, P >$. Ceci est impossible, par suite $p \geqslant n$ et H_n possède exactement n racines réelles de multiplicités impaires nécessairement égales à 1. Les racines de H_n sont donc réelles, distinctes et au nombre de n.

Dans le cas des polynômes d'Hermite, on peut tenir un raisonnement plus long mais peut-être plus naturel.
Tout d'abord, les racines de H_n sont simples. En effet, pour une racine multiple a, $H_n(a) = H_n'(a) = 0$ entraînerait $H_{n-1}(a) = 0$ par **6.**, puis $H_{n-2}(a) = 0$ d'après **8.** et finalement, en répétant l'argument, $H_0(a) = 0$ ce qui est impossible.
La propriété à établir est vraie pour $n = 1$, on la suppose vraie jusqu'à l'ordre $n-1 \geqslant 1$. Par hypothèse, H_{n-1} dispose de $n-1$ racines réelles distinctes $y_1 < \ldots < y_{n-1}$.
La simplicité des racines entraîne que les termes $(H_{n-1}'(y_k))_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont alternativement strictement positifs ou négatifs. On applique la relation **3.(a)** (i.e. $H_n = -2xH_{n-1} + H_{n-1}'$) et la suite $(H_n(y_k))_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ prend aussi alternativement des valeurs strictement positives ou négatives.
Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à H_n entraîne l'existence de $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-2}$ telle que $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_{n-2} < x_{n-2} < y_{n-1}$ avec $H_n(x_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$.
De $\lim_{x \to -\infty} H_p(x) = +\infty$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, on déduit $H_{n-1}'(y_1) < 0$. La relation **3.(a)** indique $H_n(y_1) < 0$, par suite H_n s'annule sur $]-\infty, y_1[$.
Finalement, H_n possède au moins $n-1$ racines réelles distinctes et, par division euclidienne, n racines réelles qui sont nécessairement simples et donc distinctes d'après ce qui précède. Il est aussi possible d'utiliser la parité de H_n pour conclure facilement à une n-ième racine distincte de H_n (en fait $-y_1$).

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

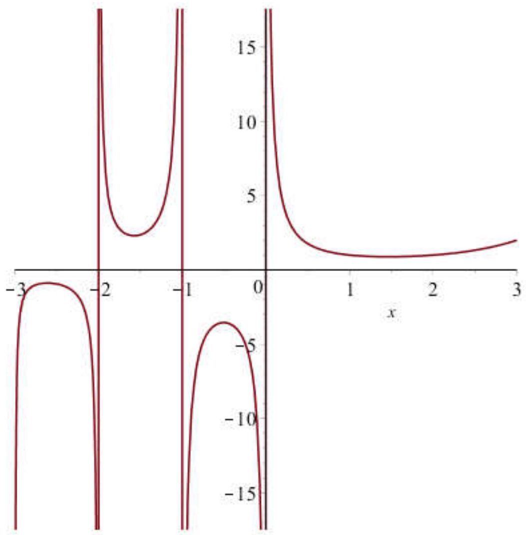
11. On fixe $x > 0$, et pour $0 < a < A$, $\int_a^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$ qui fournit le résultat par passage à la limite lorsque $a \to 0^+$ et $A \to +\infty$.
12. Par calcul direct $\Gamma(1) = 1$ puis, grâce à l'équation fonctionnelle et la continuité de Γ en 1, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.
13. On dérive $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ pour en déduire $\Gamma'(x) \sim -\frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0^+ et par suite $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma'(x) = -\infty$.
Par ailleurs, Γ'' est positive et Γ est donc convexe. On déduit, pour $x \geqslant 2$, $\Gamma'(x) \geqslant \Gamma'(2) \geqslant \Gamma(2) - \Gamma(1) = 1$, puis $\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
Enfin, pour $x \geq 2$, $\Gamma'(x+1) \geq \Gamma(x+1) - \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$ et le résultat : $\lim_{x \to +\infty} \Gamma'(x) = +\infty$.
On peut aussi, par théorème de convergence dominée, établir $\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = 0$.
Puis, pour $x \geqslant 1$, des inégalités successives $2^{x-1} \ln(2) e^{-3} \leqslant \int_2^3 \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$
, on déduit $\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = +\infty$ avant de conclure.
14. (a) La relation fonctionnelle permet de prolonger Γ pour $x \in]-1, 0[$ avec $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, si on a prolongé Γ sur $[-p, +\infty[- \{0, -1, \ldots, -p\}$, alors l'unique prolongement à $[-p-1, +\infty[- \{0, -1, \ldots, -p-1\}$ compatible avec l'équation fonctionnelle est
$$\forall x \in]-p-1, -p[, \ \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$
Ceci assure du résultat par récurrence.

(b) Par l'équation fonctionnelle, $\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{(-n)!(x+n)}$ lorsque $x \to (-n)^+$ et $x \to (-n)^-$. Attention, le terme $(x+n)$ induit un changement de signe en passant d'un coté à l'autre de l'asymptote $x = -n$.

(c) La convexité est vérifiée car $\Gamma'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par les limites, la fonction est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ puis strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$. De plus $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ montre que $x_0 \in [1, 2]$.

x	0	x_0	3
$\Gamma'(x)$	$-$	0	$+$
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\Gamma(x_0) > 0$	2

(d)



15. (a) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Des équivalents simples aux bornes de l'intervalle et la règle de Riemann permettent de conclure.

(b) La fonction $\phi(u, v) = (u, u + v) = (s, t)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}_+^2) = \{(s, t),\ 0 \leqslant t \text{ et } 0 \leqslant s \leqslant t\}$ de jacobien égal à 1.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, la fonction $g(u, v) = u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$ d'après le théorème de Fubini. Il est alors licite d'effectuer les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int\int_{(u,v)\in\mathbb{R}_+^2} g(u,v)dudv \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{s=0}^{t} g(s,t-s)|1|dsdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{s=0}^{t} s^{x-1}(t-s)^{y-1}e^{-t}dsdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{1} (tw)^{x-1}(t(1-s))^{y-1}e^{-t}tdwdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty} t^{x+y+1}\left(\int_{w=0}^{1} s^{x-1}(1-s)^{y-1}dw\right)e^{-t}dt \\
&= B(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

(c) On constate que $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^{2x-1}\sin(\theta)^{2y-1}d\theta$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(\theta)^2$. Par suite, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= 2\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)\sin(\theta))^{2x-1}d\theta \\
&= 2^{-2x+2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)^{2x-1}d\theta \\
&= 2^{-2x+2}\int_0^{1} t^{x-1/2}\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \\
&= 2^{-2x+1}\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{-1/2}dt \\
&= 2^{-2x+1}B(x,\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

On peut aussi poser $u = 2t-1$ pour symétriser l'intégrale, puis $v = u^2$ pour établir l'égalité.

(d) Pour $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on se ramène à l'intégrale de Gauss qui est au programme. On peut aussi retrouver cette valeur en calculant $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
On applique ensuite les égalités des questions **15.(b)** et **15.(c)** avec $y = x$ pour obtenir la formule de Legendre annoncée.

Partie III : Une généralisation de la notion d'intégration

16. La fonction $f_x : t \mapsto (x-t)^{-s-1}f(t)$ est intégrable sur $]-\infty, x[$ car continue sur cet intervalle, si $|f(t)| \leqslant e^{at}$, avec $a > 0$, au voisinage de $-\infty$, alors $|f_x(t)| \leqslant e^{at/2}$ au voisinage de $-\infty$. Enfin, l'intégrabilité au voisinage de x^- est assurée car $s < 0$ et f bornée. L'égalité finale résulte d'un changement de variable.

17. À l'aide du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on montre que $x \mapsto D^{(s)}(f)(x)$ est continue sur $]-\infty, x_0]$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}$.
La continuité de $(u,x) \mapsto u^{-s-1}f(x-u)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est claire. Quand à la domination, il existe $M \geqslant 0$ et $a > 0$ tels $|f(t)| \leqslant Me^{at}$ sur $]-\infty, x_0]$. Pour $x \leqslant x_0$, et pour $u > 0$, $\left|u^{-s-1}f(x-u)\right| \leqslant Me^{ax_0}u^{-s-1}e^{-au}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne dépend pas de x.
On fixe alors $x_0 = 0$, et pour $x \leqslant 0$, $\forall u > 0$, $\left|u^{-s-1}f(x-u)\right| \leqslant Mu^{-s-1}e^{-au}e^{ax}$, pour un certain $M \geqslant 0$. On intégre sur $\mathbb{R}_+^*$ pour obtenir $\left|D^{(s)}(f)(x)\right| \leqslant Ma^s e^{ax}$ et le résultat : $D^{(s)}(f) \in \mathbb{S}_0$.

18. Le résultat est clair pour $p = 1$. On le suppose acquis jusqu'à l'ordre $p - 1 \geqslant 1$. À l'ordre p, si on note $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $F = D^{(-1)}(f)$ est donc dans $\mathbb{S}_0$ et

$$D^{(-p)}(f)(x) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} u^{p-1} f(x-u)du = \frac{1}{(p-2)!}\int_0^{+\infty} u^{p-2}F(x-u)du = D^{(-p-1)}(F)(x).$$

Or, par hypothèse,

$$\begin{aligned} D^{(-p+1)}(F)(x) &= \int_{u_1=-\infty}^{x}\left(\int_{u_2=-\infty}^{u_1}\left(\dots\left(\int_{u_{p-1}=-\infty}^{u_{p-2}} F(u_{p-1})du_{p-1}\right)\dots\right)du_2\right)du_1 \\ &= \int_{u_1=-\infty}^{x}\left(\int_{u_2=-\infty}^{u_1}\left(\dots\left(\int_{u_p=-\infty}^{u_{p-1}} f(u_p)du_p\right)\dots\right)du_2\right)du_1, \end{aligned}$$

d'où le résultat. Cette propriété montre que l'on a défini une généralisation (holomorphe) de l'intégration itérée p fois, pour $p \in \mathbb{N}^*$, à l'intégration itérée $-s$ fois, $s \in]-\infty, 0[$.

19. Soit $f \in \mathbb{S}_0$. Par définition, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D^{(s)} \circ D^{(s')}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{u=-\infty}^{x}(x-u)^{-s-1}D^{(s')}(f)(u)du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{u=0}^{+\infty} u^{-s-1}\left(\int_{v=0}^{+\infty} v^{-s'-1}f(x-u-v)dv\right)du. \end{aligned}$$

Il existe $M \geqslant 0$ et $a > 0$ tels que $|f(t)| \leqslant Me^{at}$ pour $t \in]-\infty, x[$.

Les valeurs de s' et x étant fixées, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{v=0}^{+\infty}\left|v^{-s'-1}f(x-u-v)\right|dv \leqslant M\Gamma(-s')a^{s'}e^{ax}e^{-au}$.

L'application du théorème de Fubini est alors licite et on peut faire le changement de variable $u + v = t$, $u - v = r$. Le jacobien de $(t,r) \mapsto (u,v)$ est égal à $1/2$ et il vient

$$\begin{aligned} D^{(s)} \circ D^{(s')}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{(u,v)\in\mathbb{R}_+^{*2}} u^{-s-1}v^{-s'-1}f(x-u-v)dudv. \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{r=-t}^{t}\left(\frac{t+r}{2}\right)^{-s-1}\left(\frac{t-r}{2}\right)^{-s'-1} f(x-t)drdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{t} w^{-s-1}(t-w)^{-s'-1}f(x-t)dwdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{1} u^{-s-1}(1-u)^{-s'-1}f(x-t)t^{-s-s'-1}dwdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{w=0}^{1} u^{-s-1}(1-u)^{-s'-1}dw\int_{t=0}^{+\infty} f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}B(-s,-s')\int_{t=0}^{+\infty} f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s-s')}\int_{t=0}^{+\infty} f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= D^{(s+s')}(f)(x). \end{aligned}$$

À noter que le changement de variables $t = u + v$ et $w = u/t$ simplifie les calculs, mais c'est moins intuitif.

20. Soit $f \in \mathbb{S}_\infty$ et $s < 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in \mathbb{S}_0$, ce qui justifie l'égalité $\dfrac{d^n}{d^n x}D^{(s)}(f) = D^{(s)}(f^{(n)})$ par dérivation sous le signe intégral (la domination a déjà été vérifiée).

On applique alors les questions précédentes qui donnent l'existence, la continuité et l'appartenance à $\mathbb{S}_0$ de $\dfrac{d^n}{d^n x}D^{(s)}(f)$ avec l'égalité

$$\frac{d^n}{d^n x}D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty} u^{-s-1}f^{(n)}(x-u)du.$$

21. (a) Il s'agit juste d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale sur la définition de $D^{(s)}$ pour conclure. C'est ce qui a été fait à la question **20.**

(b) La première égalité vient de la question précédente. Il suffit ensuite d'intégrer n fois par parties $f^{(n)}(t)$ dans $D^{(s)} \circ d^{(n)}$ pour aboutir au résultat.

(c) Supposons, par exemple, $k = m - n \geqslant 0$. Si $k = 0$ c'est évident, sinon

$$d^{(m)} \circ D^{(s-m)} = d^{(n)} \circ d^{(m-n)} \circ D^{(s-m)} = d^{(n)} \circ \circ D^{(s-n)}$$

d'après la question **21.(b)**.

22. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > Max(s, s')$. Alors

$$\begin{aligned} D^{(s+s')} &= D^{((s-n)+(s'-n))} \circ d^{(2n)} = D^{(s-n)} \circ D^{(s'-n)} \circ d^{(2n)} \\ &= D^{(s-n)} \circ d^{(n)} \circ D^{(s'-n)} \circ d^{(n)} = D^{(s)} \circ D^{(s')}. \end{aligned}$$

Il faut tout de même remarquer que ces égalités n'ont rien de formel. Elles proviennent soit de la question **21.**, soit des propriétés élémentaires de la dérivation d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$.

23. Pour $f \in \mathbb{S}_\infty$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$D^{(n)}(f)(x) = D^{(-1)}(f^{(n+1)})(x) = \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(x-u)du = [-f^{(n)}(x-u)]_0^{+\infty} = f^{(n)}(x).$$

24. Établissons la continuité de $(x, s) \mapsto D^{(s)}(f)(x)$ sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, pour $(x_0, s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$, $s_0 < s_1$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $s_1 < n$. La fonction $f^{(n)}$ étant dans $\mathbb{S}_0$, il existe $M \geqslant 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $t \in]-\infty, x_0]$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant Me^{at}$.
La fonction $(x, s) \mapsto \Gamma(-s)^{-1}$ est continue sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, d'autre part, on a

$$\forall (x, s) \in]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1],\ \forall t > 0,\ \left|t^{n-s-1} f^{(n)}(x-t)\right| \leqslant Me^{ax_0}(t^{n-s_0-1} + t^{n-s_1-1})e^{-at} = \varphi(t).$$

L'intégrabilité de φ sur $]0, +\infty[$ et le théorème de convergence dominée entraînent la continuité de $(x, s) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{n-s-1} f^{(n)}(x-u)du$ sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, et le résultat sur $\mathbb{R}^2$.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

25. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{d^n}{d^n x}(e^{-x^2}) = H_n(x)e^{-x^2}$ qui est bien dans $\mathbb{S}_0$.

26. C'est un simple calcul : posons $G(x) = e^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} H_s(x) &= \frac{e^{x^2}}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} u^{m-s-1} D^{(m)}(G)(x-u)du \\ &= \frac{e^{x^2}}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-(x-u)^2} u^{m-s-1} du. \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu} u^{m-s-1} du. \end{aligned}$$

27. Si $s \in \mathbb{N}$, c'est immédiat. Dans le cas général, pour $n = E(s) + 1$ on fixe $m = n + 2$ et on dérive licitement sous l'intégrale obtenue à la question **26.** :

$$
\begin{aligned}
H_s'(x) &= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m'(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s-1}du \\
&= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du \\
&\quad - \frac{2m}{\Gamma((m-1)-(s-1))}\int_0^{+\infty} H_{m-1}(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{(m-1)-(s-1)-1}du \\
&= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du - 2mH_{s-1}(x) \\
&= \frac{2(m-s)}{\Gamma(m-(s-1))}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-(s-1)-1}du - 2mH_{s-1}(x) \\
&= 2(m-s)H_{s-1}(x) - 2mH_{s-1}(x) = -2sH_{s-1}(x).
\end{aligned}
$$

28. On peut dériver une fois $H_{s-1}(x) = e^{x^2}D^{(s-1)}(e^{-x^2})$. Il vient

$$H_{s-1}'(x) = 2xH_{s-1}(x) + H_s(x).$$

De $H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x)$ et $H_s''(x) = -2sH_{s-1}'(x)$, on obtient $2sH_s(x) - 2xH_s'(x) + H_s''(x) = 0$. H_s est bien solution de l'équation (E_s) : $y''(x) - 2xy'(x) + 2sy(x) = 0$.

29. En dérivant une fois $H_s(x) = e^{x^2}D^{(s)}(e^{-x^2})$, on retrouve $H_s'(x) = 2xH_s(x) + H_{s+1}(x)$. Mais on a aussi $H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x)$, ce qui donne le résultat.

30. Les solutions maximales de cette équation différentielle linéaire du second ordre sont définies sur $\mathbb{R}$ et l'espace des solutions maximales est de dimension 2.

31. (a) On applique le critère de d'Alembert.
    (b) C'est un polynôme ssi $\beta \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ et $\alpha \in -\mathbb{N}$.
    En effet, si $\alpha \notin -\mathbb{N}$, la somme admet un DL à tout ordre avec un coefficient dominant non nul pour la partie régulière : ce n'est pas un polynôme. Si $\alpha \in -\mathbb{N}$ c'est un polynôme.

32. La recherche d'une solution DSE de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ conduit aux relations

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+2} = \frac{2(k-s)}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad \text{puis,} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \frac{(-\frac{s}{2})_n}{n!(\frac{1}{2})_n}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(\frac{1-s}{2})_n}{n!(\frac{3}{2})_n}a_1.$$

Il vient

$$y_{1s}(x) = K(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; x^2) \quad \text{et} \quad y_{2s} = xK(\frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}; x^2).$$

33. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, il vient

$$H_{2n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}y_{1,2n} \quad \text{et} \quad H_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}2y_{2,2n+1}$$

c'est à dire :

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}K(-n, \frac{1}{2}; x^2) \quad \text{et} \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}2xK(-n, \frac{3}{2}; x^2)$$

On obtient en effet $H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$ par récurrence grâce à la relation de la question **8.** puis $H_{2n+1}'(0) = 2(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}$ par la relation différentielle établie à la question **6.**

34. On a nécessairement $H_s = H_s(0)y_{1s} + H_s'(0)y_{2s}$.
Pour $s < 0$, et avec la formule de Legendre,

$$H_s(0) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{-s-1}du = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}.$$

La relation de récurrence de la question **29.** donne $H_{s+1}(0) = -2sH_{s-1}(0)$, ce qui permet d'écrire

$$\forall s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, \quad H_s(0) = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}.$$

Cela est vrai sur $[0, 2[$ et on finit par récurrence.

De plus,

$$\forall s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, \quad H_s'(0) = -2sH_{s-1}(0) = -2s\frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{-s}{2}+1)} = \frac{2^{s+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{-s}{2})}.$$

Pour aller plus loin dans la question, dans tous les cas, et en étendant par continuité lorsqu'il y a une indétermination,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_s(x) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)}y_{1s} + \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(-s)}y_{2s}.$$

35. On montre facilement que le wronskien w est solution de l'équation $w' = 2xw$ que l'on résout. Si $C(z_1, z_2) = 0$, alors w est la fonction nulle. En particulier $w(0) = 0$, il en résulte que (z_1, z_2) est lié par unicité du problème de Cauchy en 0. La réciproque est évidente.

36. (a) C'est un calcul direct.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, on sait que $H_{2n}(x) = H_{2n}(-x)$ et $H_{2n+1}(x) = -H_{2n+1}(-x)$, la famille est liée.

Si $s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, on a calculé précédemment :

$$\forall s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}, \quad H_s(0) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)} \quad \text{et} \quad H_s'(0) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(-s)}.$$

La question **36.** indique que

$$C(H_s, \tilde{H}_s) = w(H_s, \tilde{H}_s)(0) = 2H_s(0)H_s'(0) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}{2\Gamma(-s)^2} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)} \neq 0.$$

On a donc un système fondamental de solutions de (E_s).

37. (a) Par Taylor-Lagrange, ou Taylor-RI, pour $u \geqslant 0$ on a $\left| e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leqslant \frac{u^{k+1}}{(n+1)!}$.

On pose alors $u = t^2$.

(b) Puisque $s < 0$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty} e^{-u^2+2xu}u^{-s-1}du.$$

On injecte $e^{-u^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^{2k}}{k!} + g_n(u)$ pour conclure avec un changement de variable $2xu = -v$ lorsque $x < 0$.
À noter que la série entière selon $1/x$ est de rayon nul. Il n'y a donc pas de développement en série entière selon $1/x$, juste un developpement asymptotique.

(c) Plusieurs arguments sont possibles. Par exemple, à partir de la relation de récurrence :

$$H_s(x) = 2xH_{s-1}(x) - 2(s-1)H_{s-2}(x).$$

Cette relation assure l'existence d'un développement asymptotique sur $[0, 1[$, puis $[1, 2[\dots$ Une récurrence simple permet d'étendre les formules génériques, obtenues pour les coefficients lorsque $s < 0$, au cas $s \in \mathbb{R}$. Sur le fond, c'est un argument d'holomorphie qui est à l'origine de cela, mais comme ici s est réel...

(d) Il vient donc $H_s(x) \sim (-2x)^s$ lorsque x tend vers $-\infty$. Ce résultat est cohérent avec la question **3.d.**

38. (a) Comme précédemment, on commence par le cas $s < 0$, l'équation de récurrence donnant le cas général $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Le cas $s \in \mathbb{N}$ est connu, il correspond au cas polynômial.

Deux méthodes au moins : on peut écrire que $\tilde{H}_s$ est solution de (E_s) et rechercher $\tilde{H}_s$ par la méthode usuelle $y(x) = H_s(x)z(x)$. On trouve $z'(x) = \lambda H_s^{-2}(x)e^{x^2}$ qui permet de conclure.

Procédons autrement : pour $s < 0$ et $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
H_s(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty} e^{-u^2+2xu}u^{-s-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-(u-x)^2}u^{-s-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(x+v)^{-s-1}dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(1+\frac{v}{x})^{-s-1}dv \\
&\sim \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}
\end{aligned}$$

par un argument classique utilisant le théorème de convergence dominée.

Comme indiqué, on étend ensuite à $s \in \mathbb{R}$ par la formule de récurrence.

(b) Oui ! Pour $x > 0$,

$$H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(1+\frac{v}{x})^{-s-1}dv.$$

On note $E_n(x) = \int_{u_1=+\infty}^{x}\int_{u_2=+\infty}^{u_1}\dots\int_{u_n=+\infty}^{u_{n-1}} e^{-u_1^2}du_n\dots du_1 = D^{(-n)}(e^{-x^2})$.

On peut intégrer par parties autant de fois que nécessaire en dérivant $(1+\frac{v}{x})^{-s-1}$ et en intégrant e^{-v^2} grâce à E_n puisque $E_n(x) = o(e^{-x})$ lorsque x tend vers $+\infty$ (en fait, c'est l'appartenance de $x \mapsto e^{-x^2}$ à $\mathbb{S}_\infty$). Chaque intégration par parties fournit un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de $H_s(x)$ au voisinage de $+\infty$.