condition suffisante (confusion entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents, connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/73/2/s2019_agreg_interne_math_1_1067732.pdf

3.1.1 Statistiques de réussite

Les candidats ont concentré leurs efforts sur les deux premières parties du problème. La partie III, consacrée à la théorie des groupes, a été peu abordée et généralement mal réussie. La partie IV a permis à plusieurs candidats de tirer leur épingle du jeu. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

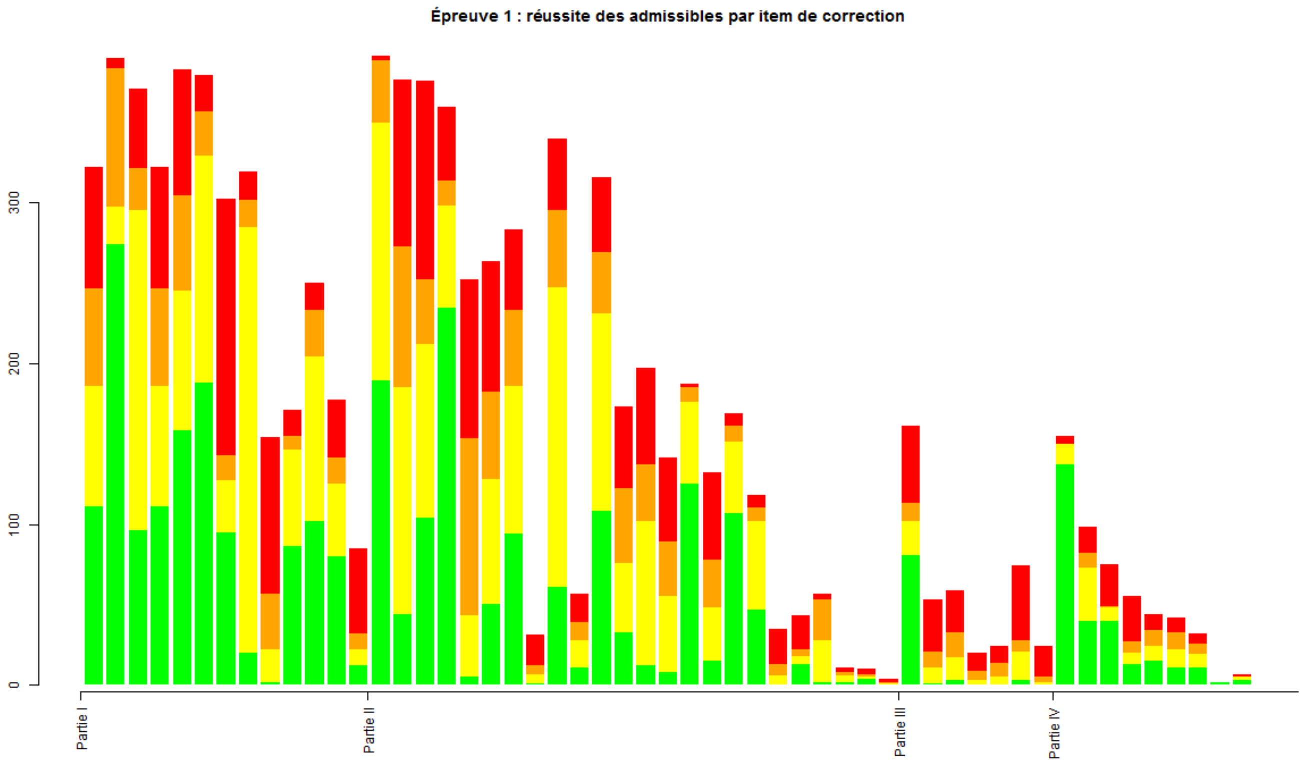

FIGURE 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.1.2 Présentation du sujet

L'épreuve a pour ambition d'amener les candidats à voir comment des méthodes algébriques du niveau de la licence, typiquement enseignées dans les cours d'algèbre linéaire, peuvent être employées pour obtenir des informations concrètes sur les graphes. Aucune connaissance de théorie des graphes n'est requise et la plupart des questions sont formulées dans un langage purement matriciel afin de ne pas dérouter les candidats. Le sujet est divisé en quatre parties, rendues aussi indépendantes que possible afin que les candidats ne se trouvent pas bloqués.

La partie I s'intéresse aux coloriages admissibles d'un graphe (les sommets sont coloriés de sorte que deux sommets reliés par une arête soient toujours de couleurs différentes) ; on y prouve une minoration du nombre de couleurs à employer due à A. J. Hoffman (*On eigenvalues and colorings of graphs*, publié en 1970).
Dans la partie II, on cherche à compter les arbres couvrant un graphe connexe donné Γ ; autrement dit, à déterminer le nombre de façons d'enlever des arêtes à Γ de manière à obtenir un arbre (graphe connexe ne contenant pas de cycle). Le résultat établi dans les questions 17 et 18 fut découvert plusieurs fois par différents auteurs ; voir le chapitre 5 de l'ouvrage *Counting labelled trees* de J. W. Moon, Canadian Mathematical Monographs n° 1, 1970.
La partie III propose une étude très modeste des groupes d'automorphismes des graphes ; considérablement amplifiée, cette étude peut mener à la construction de groupes finis simples.
Enfin, la partie IV établit une majoration du diamètre d'un graphe connexe régulier en fonction du spectre de la matrice d'adjacence du graphe ; ce résultat est tiré de l'article *Diameters and eigenvalues* de F. R. K. Chung, Journal of the American Mathematical Society, vol. 2 (1989), pp. 187–196.

3.1.3 Remarques générales

Bien que le problème ait pour thématique la théorie des graphes, les candidats ont été évalués essentiellement sur des questions classiques d'algèbre linéaire, ce qui supposait une bonne maîtrise des outils algébriques usuels : valeurs propres et vecteurs propres, théorème spectral pour les matrices symétriques réelles, inégalité de Cauchy-Schwarz, rang d'une matrice, déterminant, comatrice, polynôme caractéristique, actions de groupes.

Le sujet permettait également (et surtout) de vérifier que les candidats savent mettre en place des raisonnements rigoureux, rédigés de façon claire et précise, ne négligeant pas les vérifications mineures lorsqu'elles sont nécessaires.

3.1.4 Commentaires par question

Les commentaires ci-dessous détaillent les erreurs les plus fréquemment rencontrées dans les copies. Les questions peu traitées ne font pas l'objet de commentaire.

1 a) Plusieurs candidats emploient un vocabulaire inapproprié, laissant penser qu'ils confondent famille de vecteurs deux à deux colinéaires et famille liée de vecteurs. Cela rend moins convaincante leur argumentation concernant le rang de $G_{K_{a,b}}$. Autre détail permettant de juger de la précision du langage adopté par les candidats : il faut bien expliquer que l'on a affaire à deux vecteurs linéairement indépendants, et non pas deux vecteurs distincts.

Petit point de vocabulaire : on ne dit pas que deux vecteurs sont libres, mais qu'ils forment une famille libre, ou qu'ils sont linéairement indépendants.

Le calcul de la trace du carré de $G_{K_{a,b}}$ est incorrect dans plus d'un tiers des copies.

b) Nombre de candidats expliquent que, puisque la matrice $G_{K_{a,b}}$ est de rang 2, la multiplicité de 0 comme valeur propre de cette matrice est $a + b - 2$. Le résultat est juste, mais le raisonnement est insuffisant, car la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice n'est a priori que minorée par la dimension de l'espace propre correspondant. Un argument supplémentaire (par exemple mentionner que la matrice est diagonalisable) est ici nécessaire pour justifier l'égalité. Par ailleurs, l'utilisation du théorème du rang doit être clairement annoncée.

La trace de $(G_{K_{a,b}})^2$ est la somme des carrés des valeurs propres de $G_{K_{a,b}}$ répétées selon leurs multiplicités ; une brève justification de ce fait est attendue.

2 a) De la factorisation $M = P^{-1}DP = {}^tPDP$, où D est une matrice diagonale et P une matrice orthogonale, nombre de candidats déduisent l'égalité $(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid D\mathbf{x})$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, au prétexte que P préserve le produit scalaire. D'autres candidats affirment que comme M est diagonalisable, il existe une base B dans laquelle elle est égale à une matrice diagonale D ; ils se placent alors dans cette base et écrivent que $M\mathbf{x} = D\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ces raisonnements sont incorrects et révèlent d'importantes confusions : changement de base ou pas, si M n'est pas diagonale, elle ne pourra jamais être égale à D.

Certains candidats évitent ces écueils en décomposant correctement un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sur une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ formée de vecteurs propres de M, comme indiqué dans les éléments de correction. Malheureusement, la suite du raisonnement est parfois insatisfaisante : partant des égalités

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n, \quad M\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad ..., \quad M\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n,$$

la majoration

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) &= \lambda_1\, a_1(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1) + \cdots + \lambda_n\, a_n(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_n)\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M)\, a_1(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1) + \cdots + \lambda_{\max}(M)\, a_n(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_n) = \lambda_{\max}(M)\,(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})\end{aligned}$$

n'est valablement justifiée que si l'on indique que chaque coefficient $a_i(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_i)$ est positif.

Dans plusieurs copies, l'inégalité de l'énoncé n'est démontrée que dans le cas où $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de M ; croyant à tort que l'union des sous-espaces propres de M est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, certains candidats pensent cependant alors avoir établi le résultat demandé.

b) Peu de candidats pensent à justifier leurs manipulations : pour passer de l'inégalité de la question a) à l'inégalité

$$\lambda_{\min}(M) \leqslant \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} \leqslant \lambda_{\max}(M)$$

quand $\mathbf{x} \neq 0$, il faut non seulement mentionner que $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$ est non nul, mais aussi que ce produit scalaire est strictement positif.

Parvenus à ce point, de nombreux candidats expliquent que les valeurs $\lambda_{\min}(M)$ et $\lambda_{\max}(M)$ sont atteintes, mais négligent de conclure en employant le vocable de bornes inférieure et supérieure : ils ne répondent pas précisément à la question posée.

Plusieurs candidats manipulent les concepts de bornes inférieure et supérieure de façon imprécise, expliquant par exemple que l'inégalité ci-dessus donne directement l'égalité

$$\lambda_{\max}(M) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

alors qu'elle ne donne que l'inégalité

$$\lambda_{\max}(M) \geqslant \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}.$$

Certains candidats utilisent des arguments d'analyse pour justifier que la fonction

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

atteint ses bornes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; c'était se compliquer la vie, d'autant plus que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est pas compact. (Les arguments d'analyse nécessaires sont en fait cachés dans la preuve du théorème spectral.)

Enfin, plusieurs candidats considèrent « le » vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_{\max}(M)$, alors qu'il n'y a pas unicité.

3 a) Un très grand nombre de candidats affirment que le spectre de M' est inclus dans celui de M (en invoquant parfois une étrange notion de matrice diagonalisable par blocs) ; l'examen de l'exemple $n' = 1$ les aurait détrompés. À propos, le cas $n' = n - 1$ donne lieu à une intéressante propriété d'entrelacement, que les futurs candidats peuvent regarder à titre d'exercice : si l'on note λ_1, ..., λ_n les valeurs propres de M, répétées selon leurs multiplicités et rangées dans l'ordre croissant, si l'on note de même μ_1, ..., μ_{n-1} les valeurs propres de M', alors

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Autre remarque : certains candidats utilisent les inégalités $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, valables pour deux parties A et B bornées et non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Une explication rapide justifiant ces inégalités est alors appréciable.

b) Cette question présente deux difficultés. La première est d'observer que l'expression résultant du calcul par blocs de $(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t)$ peut être simplifiée en utilisant l'égalité $(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'')$. Quelques candidats se trouvent bloqués à cette étape, pour laquelle une explication est bienvenue. Parmi les justifications incorrectes, signalons les arguments basés sur une écriture aberrante du genre $(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') = L\mathbf{x}'\mathbf{x}''$, ou des dérapages tels $(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = (L\mathbf{x}'' \mid L\,{}^tL\mathbf{x}') = (L\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}')$.

Le second écueil est que $(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t)$ est un polynôme de degré *au plus* 2 en t. Peu de candidats indiquent que leur raisonnement basé sur la notion de discriminant sous-entend que le coefficient $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')$ de t^2 est non nul et signalent la nécessité d'un argument ad hoc pour traiter le cas exceptionnel.

c) Une minorité de candidats ont su traiter cette question avec succès. Un argument incorrect fréquemment rencontré est d'affirmer que le spectre de M est l'union des spectres de M' et de M'' ; c'est déjà faux pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour le choix $n' = n'' = 1$.

d) Cette question a été résolue par de nombreux candidats, qui observent qu'il suffit d'appliquer le résultat de la question c) à la matrice $M + \mu I_n$, où $\mu = -\lambda_{\min}(M)$. Cependant plusieurs candidats omettent de justifier, en se référant explicitement à la question a), que la matrice $M + \mu I_n$ est bien positive pour ce choix de μ.

4 La plupart des candidats comprennent que cette question se démontre par récurrence. Dans bien des copies, la démarche adoptée pour démontrer l'hérédité amène à appliquer l'hypothèse de récurrence à une autre matrice que M. Dans ces conditions, il est nécessaire d'intégrer explicitement un quantificateur universel sur la matrice à l'énoncé de l'hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, le recours à la question 3 a), indispensable pour pouvoir conclure, doit être indiqué sans ambiguïté.

5 a) La rédaction manque souvent de précision. Par exemple, il est important de faire intervenir le caractère diagonalisable de la matrice G_Γ.

b) Certains candidats répondent à la question sans jamais utiliser la notion de coloriage au cours de leur argumentation. Une telle solution ne peut pas être correcte.

6 Sur une question aussi simple, c'est la qualité de la rédaction qui est évaluée. Le jury attend un niveau de précision semblable à celui des définitions données dans l'énoncé. Il convient d'une part de nommer les propriétés démontrées (« réflexivité », « symétrie », « transitivité »), d'autre part de raisonner en partant de la définition explicite de chemin dans un graphe. De nombreux candidats n'ont pas fait cet effort et ont perdu des points.

Il est important de quantifier correctement les variables. Pour démontrer la symétrie par exemple, il convient de commencer par choisir deux sommets x et y tels que $x \sim y$, et non pas partir d'un chemin $(x_0, \ldots, x_\ell)$.

De nombreux candidats écrivent que « les chemins ne sont pas orientés », confondant chemin et arête : un chemin étant défini comme une suite finie de sommets, il ne peut à la fois aller de x à y et de y à x (sauf bien sûr si $x = y$).

7 La propriété demandée semble tellement évidente qu'une argumentation précise n'apparaît pas nécessaire aux yeux de nombre de candidats. Dans beaucoup de copies, il est simplement affirmé que s'il n'y a aucune arête reliant un point de S' à un point de S'', alors il y a au moins deux composantes connexes. Une telle réponse n'est qu'une paraphrase de l'énoncé et n'a aucune valeur. Le jury attend au contraire des candidats qu'ils prennent le soin de partir des définitions.

Parmi les erreurs observées, on note des confusions entre les notions d'arête et de chemin, entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposition, et des problèmes de quantification des variables utilisées.

Signalons enfin que l'utilisation pertinente de l'hypothèse que S' et S'' sont tous deux non vides est appréciée.

8 La définition d'arbre couvrant est mal comprise dans la moitié des copies.

9 a) Une part importante de candidats proposent la formule $M^{-1} = {}^t\mathrm{com}(M)/\det(M)$; une telle réponse partielle ne peut être recevable que si le candidat explique qu'il suppose que M est inversible. Par ailleurs, la formule $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M)$ est évidemment incorrecte.

b) De nombreux candidats affirment de façon hasardeuse qu'une matrice et sa comatrice ont même rang. L'exemple d'une matrice 3×3 de rang 1 prouve immédiatement la fausseté de cet énoncé.

Par ailleurs, plusieurs candidats essaient d'exploiter la relation fantaisiste $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$, qui laisse le jury perplexe.

c) Une matrice et sa transposée ont même déterminant. La réponse la plus simple à la question posée consiste à appliquer ce résultat aux matrices de taille $(n-1)\times(n-1)$ extraites de M et de ${}^tM$. La majorité des candidats semblent vouloir suivre cette voie... mais oublient de mentionner la propriété en question, amputant ainsi le raisonnement de son argument-clé.

Une seconde méthode part de la formule du a). Quelques calculs mènent alors à l'égalité $M\ {}^t\mathrm{com}(M) = M\,\mathrm{com}({}^tM)$. Nombre de candidats concluent ici de façon erronée en simplifiant sans précaution par M. Pour raisonner correctement, il faut commencer par supposer que M est inversible : on peut alors multiplier à gauche par M^{-1} et obtenir l'équation désirée dans ce cas particulier. Le résultat général s'obtient ensuite par prolongement, en utilisant la densité de l'ensemble des matrices inversibles et en justifiant que les coefficients de ${}^t\mathrm{com}(M)$ et $\mathrm{com}({}^tM)$ dépendent continûment de M.

10 a) Plusieurs candidats affirment que le déterminant d'une matrice est « combinaison linéaire » des coefficients de cette matrice : c'est un usage inapproprié de cette terminologie.

Procéder par récurrence requiert du soin dans la formulation de l'hypothèse de récurrence, car les cofacteurs qui apparaissent lorsqu'on développe $\det(I_m + XC)$ selon une ligne ou une colonne ne sont pas de la forme $\det(I_{m-1} + XC')$ avec C' matrice à coefficients réels de taille $(m-1)\times(m-1)$.

Quelques candidats font également des confusions entre l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et le corps $\mathbb{R}(X)$, parlant par exemple de « polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}(X)$ ».

Signalons enfin une erreur observée plusieurs fois dans la formule explicite exprimant le déterminant d'une matrice C de taille $m \times m$ en fonction de ses coefficients $c_{i,j}$

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\ c_{1,\sigma(1)}\ c_{2,\sigma(2)} \cdots c_{m,\sigma(m)}$$

où $\operatorname{sgn}(\sigma)$ est la signature de la permutation σ : le signe est bien $\operatorname{sgn}(\sigma)$ et non pas $(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$, ce dernier valant toujours 1 puisque $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

11 a) La plupart des candidats calculent

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_n + XAB \end{pmatrix}$$

et déduisent correctement de cette équation que

$$\det \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + XAB).$$

Certains candidats en concluent directement l'égalité demandée, ignorant que la formule

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \det(PS - QR)$$

pour le déterminant d'une matrice par blocs est généralement incorrecte (même quand $PS - QR$ a un sens).

D'autres candidats poursuivent le raisonnement en démontrant de façon analogue que

$$\det \begin{pmatrix} I_n & A \\ -XB & I_m \end{pmatrix} = \det(I_m + XBA)$$

et concluent en affirmant que les deux matrices

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & A \\ -XB & I_m \end{pmatrix}$$

ont même déterminant. Ce dernier point n'a toutefois rien d'évident, de sorte que la démonstration reste inaboutie. (Certains candidats affirment à tort que ces deux matrices sont transposées l'une de l'autre.)

Nombre de candidats utilisent la règle de calcul $\det(CD) = \det(DC)$ sans justification, alors que cette formule n'est valide que sous l'hypothèse que C et D sont des matrices *carrées* de même taille. Il est préférable d'invoquer des résultats du cours (ici, la multiplicativité du déterminant) plutôt que d'inventer des formules expédientes. De fait, on peut ici craindre une confusion avec l'identité $\operatorname{Tr}(CD) = \operatorname{Tr}(DC)$, valable pour des matrices rectangulaires de dimensions complémentaires.

12 La plupart des candidats comprennent que le rang de N_Γ est strictement inférieur à n, mais bien peu détaillent la preuve de cette affirmation ; il est par exemple utile de rappeler que n est le nombre de colonnes de N_Γ.

Plusieurs candidats argumentent ainsi : la somme des colonnes est nulle, donc le déterminant de N_Γ est nul, donc N_Γ n'est pas inversible, donc N_Γ n'est pas de rang n : ce raisonnement sous-entend que N_Γ est une matrice carrée et n'est donc pas correct.

13 Certains candidats oublient de traiter le cas où une ligne de M ne contient que des 0.

D'autres lisent mal l'indication : il est suggéré de traiter le cas où toutes les lignes de M contiennent un 1 et un -1, pas celui où une ligne de M contient un 1 et un -1. L'analyse de ce dernier cas conduit d'ailleurs généralement à une erreur grossière : en développant selon la ligne en question, on parvient à exprimer $\det(M)$ comme somme de deux termes, chacun égal à -1, 0 ou 1 par hypothèse de récurrence ; il est alors difficile de conclure (mais quelques candidats téméraires semblent y croire) que $\det(M)$ appartient à $\{-1, 0, 1\}$.

14 a) Les réponses à cette question sont souvent bien embrouillées. On attend des candidats qu'ils distinguent clairement entre arête et chemin, et qu'ils produisent un raisonnement clairement structuré, par double implication par exemple.

15 a) Plusieurs candidats écrivent que changer d'orientation transforme N_Γ en son opposée. Cela n'est le cas que si l'on change l'orientation de toutes les arêtes.

c) L'inclusion $\operatorname{im} Q_\Gamma \subset \operatorname{im} {}^tN_\Gamma$ est banale, et la difficulté est de justifier qu'il y a en fait égalité. Une erreur commise ici par plusieurs candidats est d'écrire que pour une matrice M de taille $m \times n$, on a $(\ker M) \oplus (\operatorname{im} M) = \mathbb{R}^m$. Une telle égalité ne peut avoir de sens que si $m = n$, et même dans ce cas ne vaut que sous certaines hypothèses (par exemple si M est diagonalisable).

16 La rédaction est souvent assez confuse dans les quelques copies ayant abordé cette question. Il faut à chaque instant veiller à indiquer clairement quelle implication est étudiée et préciser quelle hypothèse est faite.

Pour l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii), il est attendu du candidat qu'il explique que N_B est la matrice d'incidence du graphe (S, B). Pour l'implication iii) $\Rightarrow$ iv), une simple paraphrase de l'indication ne peut pas être acceptée comme réponse correcte.

19 c) Plusieurs candidats, ayant traité correctement la question 19 a) et ayant lu l'énoncé de la question 19 b), comprennent que le résultat demandé est une conséquence de la formule des classes, une fois prouvé que le stabilisateur d'un 3-arc est trivial. Malheureusement la démonstration de ce dernier fait est souvent bâclée et incomplète.

d) Lisant mal la question posée, quelques candidats ayant abordé cette question croient qu'il s'agit de prouver que les permutations (123456), (13), (24), (35), (46), (15) et (26) appartiennent au groupe $\operatorname{Aut}(\Gamma)$.

20 Plusieurs candidats affirment que le groupe des automorphismes du graphe de gauche (le carré) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cela n'est pas correct : il s'agit en fait du groupe diédral à 8 éléments, qui est d'ailleurs au programme du concours.

21 a) Cette question est un exercice de cours incontournable. Les candidats y répondant de façon satisfaisante se comptent sur les doigts d'une main.

22 b) Cette question est une variante simple des cercles de Gershgorin, un exercice très classique. L'indication fournie la rend parfaitement abordable ; il s'agit juste d'être précis dans la manipulation des inégalités, notamment de ne pas oublier de préciser à la fin que l'on divise par le réel strictement positif $|x_i|$.

23 b) Prêtant insuffisamment attention aux indices, la plupart des candidats ayant abordé cette question affirment que l'égalité demandée est une conséquence directe de l'hypothèse $\|\mathbf{v}_p\| = 1$, alors qu'en fait

$$\|\mathbf{v}_p\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v_{p,i})^2.$$