3.1.5 Éléments de correction

Les indications exposées dans cette section proposent aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Elles sont cependant parfois trop succinctes pour constituer un modèle de rédaction répondant à toutes les attentes du jury.

1 a) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{a+b}$ engendré par les vecteurs colonnes de $G_{K_{a,b}}$ admet manifestement pour base la première et la dernière colonne de cette matrice (on utilise ici que a et b sont tous deux supérieurs à 1) ; le rang de $G_{K_{a,b}}$ est donc 2. La trace de $G_{K_{a,b}}$ est nulle, puisque tous les coefficients diagonaux de cette matrice sont nuls. Enfin, on calcule

$$(G_{K_{a,b}})^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b & \cdots & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \end{array}\right)$$

où les blocs diagonaux sont de taille $a \times a$ et $b \times b$; ainsi la trace de $(G_{K_{a,b}})^2$ vaut $2ab$.

b) La multiplicité de 0 comme valeur propre de $G_{K_{a,b}}$ est supérieure ou égale à la dimension de l'espace propre correspondant de $G_{K_{a,b}}$. Cet espace propre est le noyau de $G_{K_{a,b}}$, et est de dimension $a + b - 2$ d'après le théorème du rang et la réponse à la question a). La multiplicité de 0 comme valeur propre est donc supérieure ou égale à $a + b - 2$.

Notons λ_1, ..., λ_{a+b} les valeurs propres complexes de $G_{K_{a,b}}$, répétées selon leurs multiplicités. En trigonalisant $G_{K_{a,b}}$, on parvient aux équations

$$0 = \mathrm{Tr}(G_{K_{a,b}}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{a+b} \quad \text{et} \quad 2ab = \mathrm{Tr}((G_{K_{a,b}})^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{a+b}^2$$

où Tr désigne la trace d'une matrice carrée. Au moins $a + b - 2$ des valeurs propres λ_i sont nulles, donc au plus 2 ne le sont pas. Elles ne peuvent pas être toutes nulles à cause de la seconde équation, et elles doivent être de somme nulle à cause de la première équation. Il y a donc exactement deux valeurs propres non nulles, opposées l'une de l'autre. Notons-les λ et $-\lambda$; alors notre seconde équation nous donne $2\lambda^2 = 2ab$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{ab}$.

En conclusion, le spectre de $K_{a,b}$ est formé des valeurs $\sqrt{ab}$ et $-\sqrt{ab}$, toutes deux avec multiplicité 1, et (dans le cas où $a + b > 2$) de la valeur 0 avec multiplicité $a + b - 2$.

Il est possible d'argumenter de façon légèrement différente : comme $G_{K_{a,b}}$ est symétrique donc diagonalisable, la multiplicité de 0 comme valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé, donc est $a+b-2$. Il est par ailleurs possible d'exhiber des vecteurs propres pour les valeurs propres $\pm\sqrt{ab}$.

2 a) L'énoncé rappelle que M, matrice symétrique réelle, est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale. Il existe donc une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres. Appelons λ_i la valeur propre de $\mathbf{e}_i$. Soit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On calcule sans peine $M\mathbf{x} = \lambda_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mathbf{e}_n$, puis

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{et} \quad (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i^2 \geqslant 0$ et $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}(M)$, d'où

$$\lambda_{\min}(M)\, x_i^2 \leqslant \lambda_i\, x_i^2 \leqslant \lambda_{\max}(M)\, x_i^2,$$

et par sommation

$$\lambda_{\min}(M)\, (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max}(M)\, (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}).$$

b) En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue au a) par le nombre strictement positif $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$, on constate que $\lambda_{\max}(M)$ majore

$$\frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui prouve l'existence de la borne supérieure indiquée dans l'énoncé et l'inégalité

$$\lambda_{\max}(M) \geqslant \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}.$$

D'un autre côté, la valeur $\lambda_{\max}(M)$ est l'un des λ_i, et pour le vecteur $\mathbf{e}_i$ correspondant, on a

$$\frac{(\mathbf{e}_i \mid M\mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_i)} = \lambda_i = \lambda_{\max}(M).$$

La borne supérieure vaut donc $\lambda_{\max}(M)$ et est atteinte.
Un raisonnement analogue établit que

$$\lambda_{\min}(M) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

et que cette borne inférieure est atteinte.

3 a) Soit $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}$ un vecteur propre (donc non nul) de M' pour la valeur propre $\lambda_{\min}(M')$; alors

$$\lambda_{\min}(M') = \frac{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')}{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')}.$$

Posons $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0)$ où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n''}$. Un calcul immédiat par blocs montre que $(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')$, d'où

$$\lambda_{\min}(M) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{y} \mid M\mathbf{y})}{(\mathbf{y} \mid \mathbf{y})} \leqslant \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')}{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')} = \lambda_{\min}(M').$$

On montre de même que $\lambda_{\max}(M) \geqslant \lambda_{\max}(M')$.

b) Considérons le vecteur $\mathbf{x}_t$ indiqué dans l'énoncé, où $t \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne

$$(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t) = t^2(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + t(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + t(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'').$$

En regardant $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{x}''$ comme des vecteurs colonnes et en identifiant une matrice 1×1 à son unique coefficient, on a de plus

$$(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = {}^t\mathbf{x}''\ {}^tL\ \mathbf{x}' = {}^t\big({}^t\mathbf{x}'\ L\mathbf{x}''\big) = {}^t\mathbf{x}'\ L\mathbf{x}'' = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'').$$

(Le produit scalaire du membre de gauche de l'égalité ci-dessus est calculé dans $\mathbb{R}^{n''}$, celui du membre de droite est calculé dans $\mathbb{R}^{n'}$.) Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t^2(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2t(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \geqslant 0.$$

Si $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') \neq 0$, il s'agit là d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels, qui ne peut pas changer de signe, donc qui est de discriminant négatif :

$$4(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'')^2 - 4(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \leqslant 0.$$

Si $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') = 0$, il s'agit d'une forme linéaire affine en t, qui ne peut pas changer de signe, donc qui est constante :

$$(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') = 0.$$

L'égalité demandée est donc vraie dans l'un et l'autre cas.

c) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (donc non nul) de M pour la valeur propre $\lambda_{\max}(M)$. Écrivant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, on calcule par blocs

$$\lambda_{\max}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'').$$

En utilisant l'inégalité prouvée dans le b), puis les inégalités

$$0 \leqslant (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') \leqslant \lambda_{\max}(M')\ (\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \leqslant \lambda_{\max}(M'')\ (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')$$

et enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on majore

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) &\leqslant (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2\sqrt{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'')} + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \\
&\leqslant \left(\sqrt{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')} + \sqrt{(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'')}\right)^2 \\
&\leqslant \left(\sqrt{\lambda_{\max}(M')}\sqrt{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')} + \sqrt{\lambda_{\max}(M'')}\sqrt{(\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')}\right)^2 \\
&\leqslant \big(\lambda_{\max}(M') + \lambda_{\max}(M'')\big)\ \big((\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')\big).
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de Pythagore $(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'') = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$ et la stricte positivité de cette quantité.

d) La question 2 a) montre que la matrice $\widetilde{M} = M - \lambda_{\min}(M) I_n$ est positive. On décompose $\widetilde{M}$ de façon similaire à M, faisant notamment apparaître les blocs diagonaux $\widetilde{M}' = M' - \lambda_{\min}(M) I_{n'}$ et $\widetilde{M}'' = M'' - \lambda_{\min}(M) I_{n''}$. D'après la question c), on a

$$\lambda_{\max}(\widetilde{M}) \leqslant \lambda_{\max}(\widetilde{M}') + \lambda_{\max}(\widetilde{M}'').$$

Cela se réécrit

$$\lambda_{\max}(M) - \lambda_{\min}(M) \leqslant \big(\lambda_{\max}(M') - \lambda_{\min}(M)\big) + \big(\lambda_{\max}(M'') - \lambda_{\min}(M)\big),$$

qui se simplifie en l'inégalité demandée.

4 L'entier n et la matrice M étant fixés, on procède par récurrence sur k, l'hypothèse de récurrence (H_k) s'énonçant : « Pour toute partition en k parts $n = n_1 + \cdots + n_k$, appelant M_1, ..., M_k les blocs diagonaux de M correspondant à cette partition, l'inégalité ... vaut. »

La question 3 d) prouve l'énoncé (H_2). Supposons l'hypothèse de récurrence (H_{k-1}) prouvée pour $k-1 \geqslant 2$ et établissons (H_k). Soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ comme dans l'énoncé de (H_k). Écrivons la matrice M par blocs selon cette partition de n et notons

$$M'_{k-1} = \begin{pmatrix} M_{k-1} & * \\ * & M_k \end{pmatrix}$$

la matrice formée des quatre blocs dans le coin inférieur droit de M. L'énoncé (H_{k-1}) appliqué à la partition $n = n_1 + \cdots + n_{k-2} + (n_{k-1} + n_k)$ nous donne

$$\lambda_{\max}(M) + (k-2)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M'_{k-1}).$$

Une variante de la question 3 a) indique que $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\min}(M'_{k-1})$; en ajoutant membre à membre, nous obtenons

$$\lambda_{\max}(M) + (k-1)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M'_{k-1}) + \lambda_{\min}(M'_{k-1}).$$

Pour conclure, il suffit d'observer que

$$\lambda_{\max}(M'_{k-1}) + \lambda_{\min}(M'_{k-1}) \leqslant \lambda_{\max}(M_{k-1}) + \lambda_{\max}(M_k)$$

d'après la question 3 d) appliquée à la matrice M'_{k-1}.

D'autres méthodes sont possibles ; la plupart des variantes nécessitent d'inclure dans l'hypothèse de récurrence un quantificateur portant sur la matrice M.

5 a) En choisissant une énumération des sommets de Γ, nous pouvons définir la matrice d'adjacence G_Γ. À l'évidence, $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(G_\Gamma)$. Faisons l'hypothèse que $\lambda_{\min} \geqslant 0$. Alors toutes les valeurs propres de G_Γ sont positives. Comme G_Γ est de trace nulle, cela implique que toutes les valeurs propres de G_Γ sont nulles. Comme G_Γ est diagonalisable, cela entraîne que G_Γ est en fait nulle. Cela est impossible, car par hypothèse Γ contient au moins une arête. Nous avons donc démontré par l'absurde que $\lambda_{\min} < 0$.

b) Supposons qu'il existe un coloriage admissible de Γ en k couleurs, donné par une application $c : S \to [\![1, k]\!]$. Choisissons une énumération des sommets de Γ en commençant par les sommets dans $c^{-1}(\{1\})$, puis en prenant les sommets dans $c^{-1}(\{2\})$, etc. La matrice G_Γ a alors la forme

$$G_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & * & 0 \end{pmatrix}$$

avec k blocs diagonaux nuls. L'inégalité prouvée à la question 4 donne ici $\lambda_{\max}(G_\Gamma) + (k - 1)\lambda_{\min}(G_\Gamma) \leqslant 0$, d'où $k \geqslant 1 - \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

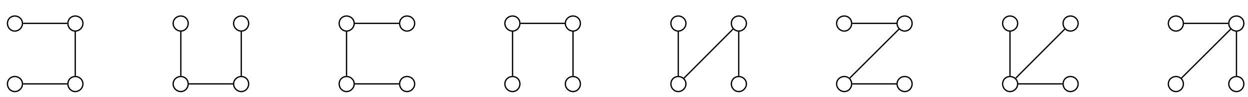
On peut partitionner les vingt-sept sommets du graphe de Schläfli en neuf paquets, chaque paquet de trois étant formé des points sur un même diamètre du disque. Les points d'un même paquet ne sont reliés par aucune arête. De la sorte, on voit que le graphe de Schläfli admet un coloriage admissible avec neuf couleurs.

6 Justifions en détail que $\sim$ est une relation transitive. Soit $(x, y, z) \in S^3$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors il existe deux chemins $(x_0, \dots, x_\ell)$ et $(y_0, \dots, y_m)$ dans Γ tels que $x_0 = x$, $x_\ell = y_0 = y$ et $y_m = z$. Posons $x_k = y_{k-\ell}$ pour tout $k \in [\![\ell + 1, \ell + m]\!]$. Assurément alors $(x_0, \dots, x_{\ell+m})$ est un chemin reliant $x_0 = x$ à $x_{\ell+m} = y_m = z$. Par suite $x \sim z$.

On vérifie de façon analogue que $\sim$ est réflexive (pour relier x à lui-même, on prend un chemin de longueur 0) et symétrique (supposant $x \sim y$, on prend un chemin reliant x à y, et on le parcourt dans le sens inverse pour relier y à x, établissant ainsi $y \sim x$).

7 Soit Γ, S, A, S', S'' comme dans l'énoncé. Soit $x \in S'$ et $y \in S''$ (ces deux ensembles sont non vides). Puisque Γ est connexe, on a $x \sim y$, donc il existe un chemin $(x_0, \dots, x_\ell)$ reliant x à y. Soit $I = \{k \in [\![0, \ell]\!] \mid x_k \in S''\}$. Alors I est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (il possède ℓ), donc il contient un plus petit élément, disons k. Certainement $k > 0$ car $0 \notin I$ par construction. Ainsi x_{k-1} existe et n'appartient pas à S'', donc $x_{k-1} \in S'$, et comme $x_k \in S''$, l'arête $\{x_{k-1}, x_k\}$ relie un point de S' à un point de S''.

8 Il y a huit arbres couvrant le graphe dessiné dans l'énoncé :



9 a) Deux réponses sont ici acceptables, à savoir $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M)I_n$ et ${}^t\mathrm{com}(M)\,M = \det(M)I_n$. Ces identités se déduisent de la règle de calcul du déterminant d'une matrice selon une ligne ou une colonne.

b) Si M est de rang n, alors $\det(M)$ est non nul, et donc ${}^t\mathrm{com}(M)$ est inversible d'inverse $M/\det(M)$ d'après la question a) ; par suite $\mathrm{com}(M)$ est de rang n. Si M est de rang inférieur ou égal à $n-2$, alors elle n'admet pas de sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1)\times(n-1)$, donc tous les mineurs d'ordre $n-1$ de M sont nuls, et alors $\mathrm{com}(M)$ est nulle et de rang 0.

Il reste le cas où M est de rang $n-1$. Le noyau de M est alors une droite, et cette droite contient l'image de ${}^t\mathrm{com}(M)$ d'après l'identité $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = 0$ énoncée dans la réponse à la question a).

Par conséquent, le rang de ${}^t\mathrm{com}(M)$ est au plus 1. Or une matrice et sa transposée ont même rang : le rang de $\mathrm{com}(M)$ est donc au plus 1. Maintenant, M possède une sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1)\times(n-1)$, donc $\mathrm{com}(M)$ n'est pas nulle. En fin de compte, le rang de $\mathrm{com}(M)$ est égal à 1.

Remarque : dans le cas $n=1$, les réponses aux questions a) et b) restent valables si l'on convient que $\mathrm{com}(M)$ est la matrice identité I_1 quelle que soit M.

c) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. La matrice extraite de ${}^tM$ obtenue en supprimant la j-ème ligne et la i-ème colonne est la transposée de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ces deux matrices ont donc même déterminant, ce qui implique, après multiplication par le signe $(-1)^{i+j}$, que le coefficient (j,i) de $\mathrm{com}({}^tM)$ est égal au coefficient (i,j) de $\mathrm{com}(M)$. Ainsi $\mathrm{com}({}^tM)={}^t\mathrm{com}(M)$.

Il est aussi possible de traiter d'abord le cas d'une matrice M inversible, en inférant de la question a) la formule $\mathrm{com}(M)=\det(M)\ ({}^tM)^{-1}$. Le cas général s'en déduit en établissant la continuité de l'application $M\mapsto\mathrm{com}(M)$ et en utilisant la densité de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des matrices de taille $n\times n$.

10 a) Soit $(c_{i,j})$ la famille des coefficients de C ; soit $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker donnant les coefficients de la matrice identité. La formule classique pour le déterminant décrit

$$\det(I_m+XC)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma)\ (\delta_{1,\sigma(1)}+Xc_{1,\sigma(1)})\cdots(\delta_{m,\sigma(m)}+Xc_{m,\sigma(m)})$$

comme un polynôme en X à coefficients réels. (Ici, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ est la signature d'une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_m$.)

b) Chaque produit figurant dans la somme ci-dessus peut être développé de la façon suivante :

$$(\delta_{1,\sigma(1)}+Xc_{1,\sigma(1)})\cdots(\delta_{m,\sigma(m)}+Xc_{m,\sigma(m)})=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}\left(\prod_{j\notin K}\delta_{j,\sigma(j)}\right)\left(\prod_{i\in K}Xc_{i,\sigma(i)}\right).$$

Substituant dans la formule de la question a), on obtient une somme double. Échangeant les signes de sommation, cela donne, en raison de l'annulation des symboles de Kronecker :

$$\begin{aligned}\det(I_m+XC)&=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{j\notin K}\delta_{j,\sigma(j)}\right)\left(\prod_{i\in K}Xc_{i,\sigma(i)}\right)\\&=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}X^{|K|}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_m\\ \sigma(j)=j\text{ si }j\notin K}}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i\in K}c_{i,\sigma(i)}\right).\end{aligned}$$

La seconde somme ci-dessus porte sur les permutations fixant les points de $[\![1,m]\!]\setminus K$. La donnée d'une telle permutation, disons σ, équivaut à celle d'une permutation σ' de l'ensemble K, et alors $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma')$, comme on le voit en écrivant σ' comme un produit de transpositions et en examinant la parité du nombre de facteurs nécessaires. Ainsi la seconde somme est égale au déterminant de la matrice C_K extraite de C obtenue en ne gardant que les coefficients dont les indices de ligne et de colonne appartiennent à K. Nous avons donc prouvé que

$$\det(I_m+XC)=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}X^{|K|}\det(C_K)=\sum_{n=0}^{m}X^n\sum_{K\in\mathscr{P}_n([\![1,m]\!])}\det(C_K).$$

Le résultat demandé est équivalent à cette formule.

11 a) Considérons les deux matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ données dans l'énoncé.
Les tailles des blocs s'accordent pour légitimer le calcul des produits

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_n + XAB \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + XBA & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices ci-dessus sont carrées et de même taille $(m+n) \times (m+n)$, à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(X)$; il est donc légitime de considérer leurs déterminants. En utilisant la multiplicativité du déterminant et la formule bien connue du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on en déduit la formule demandée

$$\det(I_n + XAB) = \det \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m + XBA).$$

b) D'après la question 10 b), le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre n de la matrice BA. Soit $K \in \mathscr{P}_n([\![1, m]\!])$. La sous-matrice extraite de BA en ne gardant que les coefficients dont les indices de ligne et de colonne appartiennent à K est simplement $B_K A_K$, par définition de A_K et B_K. Le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est donc

$$\sum_{K \in \mathscr{P}_n([\![1,m]\!])} \det(B_K A_K).$$

De plus, A_K et B_K sont des matrices carrées de même taille, donc $\det(B_K A_K) = \det(A_K)\det(B_K)$. En fin de compte, le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est le membre de droite de l'égalité donnée dans l'énoncé.

D'autre part, le coefficient de X^n dans $\det(I_n + XAB)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre n de la matrice AB. Comme AB est carrée de taille $n \times n$, il n'y a qu'un seul tel mineur, à savoir $\det(AB)$.

Le résultat demandé découle alors de la question a).

12 Chaque ligne de N_Γ correspond à une arête de Γ, donc contient un coefficient -1, sur la colonne indexée par le même numéro que le sommet au début de l'arête, et un coefficient 1, sur la colonne indexée par le même numéro que le sommet à la fin de l'arête. Les autres coefficients sont nuls. Par conséquent, la somme des coefficients sur chaque ligne est nulle. Dit autrement, la somme des colonnes de N_Γ est nulle. Les n vecteurs colonnes de Γ étant ainsi liés, la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent est strictement inférieure à n. Le rang de N_Γ est donc strictement inférieur à n.

13 Soit M une sous-matrice carrée extraite de N_Γ. Si chaque ligne de M contient un 1 et un -1, alors la somme des colonnes de M est nulle, donc les colonnes de M sont liées, et alors $\det(M) = 0$. La conclusion $\det(M) = 0$ a également lieu si une ligne de M ne contient que des 0. Le dernier cas est celui où une ligne de M contient un seul coefficient non nul, qui vaut bien sûr ± 1. Lorsqu'on calcule le déterminant de M en développant selon cette ligne, on obtient un seul terme, égal à plus ou moins le déterminant de la sous-matrice carrée M' extraite de M en omettant la ligne et la colonne où se trouve notre coefficient ± 1. Une récurrence sur la taille de M, facilement initialisée, permet alors d'obtenir la propriété annoncée.

14 a) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, vu comme vecteur colonne. Considérons les trois énoncés suivants :

(A) $N_\Gamma \mathbf{x} = 0$.

(B) $x_j = x_k$ pour tous $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ.

(C) $x_j = x_k$ pour tous $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $s_j \sim s_k$.

La question demande d'établir que les énoncés (A) et (C) sont équivalents. Il suffit de prouver que (A) et (B) d'une part, et (B) et (C) d'autre part, sont équivalents.

La i-ème ligne du vecteur colonne $N_\Gamma \mathbf{x}$ est égale à $x_j - x_k$, si $j, k \in [\![1, n]\!]$ sont les indices tels que s_j et s_k sont les sommets à la fin et au début de l'arête a_i. Par conséquent, pour que $\mathbf{x}$ appartienne au noyau de N_Γ, il faut et il suffit que $x_j - x_k$ soit nul chaque fois que $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ. Ceci justifie l'équivalence des énoncés (A) et (B).

Supposons (B). Soient $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $s_j \sim s_k$. Alors il existe un chemin dans Γ reliant s_j à s_k. Appelant ℓ la longueur de ce chemin, il existe une application $p : [\![0, \ell]\!] \to [\![1, n]\!]$ permettant d'écrire ce chemin sous la forme $(s_{p(0)}, s_{p(1)}, \ldots, s_{p(\ell)})$; au surplus $p(0) = j$ et $p(\ell) = k$. Pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, la paire $\{s_{p(i-1)}, s_{p(i)}\}$ est une arête de Γ, et donc $x_{p(i-1)} = x_{p(i)}$ puisque l'énoncé (B) est supposé vrai. Par conséquent

$$x_j = x_{p(0)} = x_{p(1)} = \cdots = x_{p(\ell)} = x_k.$$

Ceci établit l'énoncé (C).

L'alinéa précédent établit l'implication (B) $\Rightarrow$ (C). L'implication réciproque, plus simple, vient du fait que si $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ, alors $s_j \sim s_k$.

b) La notation $\mathbb{R}^S$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de S dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^S$ formé des fonctions $\varphi : S \to \mathbb{R}$ constantes sur chaque composante connexe de Γ. La dimension de $\mathscr{C}$ est égale au nombre de composantes connexes de Γ, puisque l'ensemble des fonctions indicatrices desdites composantes est une base de $\mathscr{C}$.

Soit $\Psi : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^n$ l'application qui, à une fonction $\varphi : S \to \mathbb{R}$, associe la famille $\mathbf{x} = (\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n))$. Cette application Ψ est une bijection linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension n. La question a) démontre que $\Psi(\varphi)$ appartient au noyau de N_Γ si et seulement si φ appartient à $\mathscr{C}$. La bijection linéaire Ψ préservant les dimensions des sous-espaces vectoriels, le noyau de N_Γ et $\mathscr{C}$ ont même dimension.

En conclusion, la dimension du noyau de N_Γ est égale au nombre de composantes connexes de Γ.

c) Dans le cas particulier où Γ est connexe, l'énoncé de la question a) se réduit à : $\mathbf{x}$ appartient au noyau de N_Γ si et seulement si les coordonnées x_j de $\mathbf{x}$ sont toutes égales.

15 a) La matrice Q_Γ ne dépend pas du choix de l'orientation du graphe. En effet, si l'on renverse l'orientation de l'arête a_i, alors la i-ème ligne de N_Γ et la i-ème colonne de ${}^t N_\Gamma$ sont toutes deux multipliées par -1, et ce changement n'a aucune conséquence lorsqu'on effectue le produit ${}^t N_\Gamma \, N_\Gamma$.

Remarque : on peut en fait facilement vérifier (ce n'était pas demandé) que $Q_\Gamma = V - G_\Gamma$, où V est la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont le i-ème coefficient diagonal est égal au nombre d'arêtes de Γ incidentes au sommet s_i.

b) Une conséquence immédiate de la définition $Q_\Gamma = {}^t N_\Gamma \, N_\Gamma$ est que le noyau de N_Γ est inclus dans celui de Q_Γ. Réciproquement, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ appartient au noyau de Q_Γ, alors

$$(N_\Gamma \mathbf{x} \mid N_\Gamma \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid {}^t N_\Gamma \, N_\Gamma \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid Q_\Gamma \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid 0) = 0;$$

le produit scalaire étant défini, il vient $N_\Gamma \mathbf{x} = 0$, et $\mathbf{x}$ appartient au noyau de N_Γ.

c) La définition $Q_\Gamma = {}^t N_\Gamma\, N_\Gamma$ implique que l'image de Q_Γ est incluse dans celle de ${}^t N_\Gamma$. Ensuite, le théorème du rang et la question b) donnent

$$\dim \operatorname{im} Q_\Gamma = n - \dim \ker Q_\Gamma = n - \dim \ker N_\Gamma = \dim \operatorname{im} N_\Gamma.$$

Or une matrice et sa transposée ont même rang. Il vient ainsi

$$\dim \operatorname{im} Q_\Gamma = \dim \operatorname{im} N_\Gamma = \dim \operatorname{im} {}^t N_\Gamma.$$

L'inclusion $\operatorname{im} Q_\Gamma \subset \operatorname{im} {}^t N_\Gamma$ obtenue au début de l'argument est donc une égalité.

d) Si Γ n'est pas connexe, alors $\ker Q_\Gamma = \ker N_\Gamma$ est de dimension au moins 2 (questions 14 b) et 15 b)), donc Q_Γ est de rang au plus $n-2$, donc $\operatorname{com}(Q_\Gamma) = 0$ (question 9 b)).

Si Γ est connexe, alors Q_Γ est de rang $n-1$ et son noyau est engendré par le vecteur $(1, \ldots, 1)$ (questions 14 c) et 15 b)). L'identité $Q_\Gamma\ {}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma) = 0$ (question 9 a)) implique que chaque colonne de ${}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est proportionnelle au vecteur $(1, \ldots, 1)$. Les lignes de ${}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma)$, c'est-à-dire les colonnes de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$, sont donc toutes égales.

e) La matrice Q_Γ est symétrique, donc sa comatrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ l'est aussi (question 9 c)). La question d) affirme que les coefficients sur une même ligne de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont tous égaux ; par symétrie, les coefficients sur une même colonne de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont également tous égaux. En fin de compte, tous les coefficients de la matrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont égaux, ce qui signifie que $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est un multiple scalaire de J_n.

16 Un graphe (S, B) tel que $|S| = |B| + 1$ est un arbre si et seulement si c'est un graphe connexe ; cette remarque entraîne l'équivalence entre les énoncés i) et ii).

La matrice N_B est la matrice d'incidence du graphe (S, B). L'équivalence entre les énoncés ii) et iii) est donc une conséquence immédiate de la question 14 b) (et du théorème du rang appliqué à la matrice N_B).

Si iv) est vraie, alors N_B contient une sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1) \times (n-1)$, donc est de rang supérieur ou égal à $n-1$. Comme N_B possède $n-1$ lignes, il y a en fait égalité, d'où iii).

Enfin, si iv) n'est pas vraie, alors N'_B n'est pas inversible, donc il existe un vecteur $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ dans le noyau de N'_B. Alors le vecteur $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0)$ de $\mathbb{R}^n$ est non nul, appartient au noyau de N_B, et n'est pas proportionnel au vecteur $(1, \ldots, 1)$. Ceci nous donne deux vecteurs linéairement indépendants dans le noyau de N_B. D'après le théorème du rang, N_B est donc de rang au plus $n-2$, et ainsi iii) n'est pas vraie. Ce raisonnement démontre l'implication iii) $\Rightarrow$ iv) par contraposition.

17 a) Soit N'_Γ la matrice de taille $m \times (n-1)$ extraite de N_Γ obtenue en supprimant la dernière colonne. Alors $Q'_\Gamma = {}^t N'_\Gamma\, N'_\Gamma$ est la matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ extraite de Q_Γ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\det(Q'_\Gamma) = \sum_{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!])} \det({}^t N'_B) \det(N'_B) = \sum_{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!])} \det(N'_B)^2.$$

Le graphe (S, B) est un arbre couvrant Γ si et seulement si $\det(N'_B) \neq 0$ (question 16), donc si et seulement si $\det(N'_B) \in \{-1, 1\}$ (question 13). Par conséquent

$$\det(Q'_\Gamma) = \sum_{\substack{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!]) \\ (S,B) \text{ est un arbre couvrant}}} (\pm 1)^2 = \kappa(\Gamma).$$

b) La question 15 e) signifie que les coefficients de la matrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont tous égaux. Or, d'après la question a), le coefficient en position (n, n) de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est égal à $\kappa(\Gamma)$. Donc tous les coefficients de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont égaux à $\kappa(\Gamma)$.

18 Le réel $\chi'(0)$ est le coefficient de X dans le polynôme $\chi(X)$. Comme

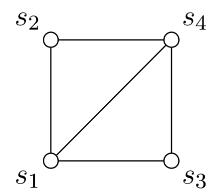
$$\det(I_n - XQ_\Gamma) = \det(XI_n)\det(X^{-1}I_n - Q_\Gamma) = X^n\ \chi(X^{-1}),$$

c'est aussi le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme $\det(I_n - XQ_\Gamma)$. D'après la question 10 b), ce réel est la somme des mineurs principaux d'ordre $n-1$ de la matrice $-Q_\Gamma$, autrement dit, $(-1)^{n-1}$ fois la somme des coefficients diagonaux de la comatrice de Q_Γ. La formule $\mathrm{com}(Q_\Gamma) = \kappa(\Gamma)\ J_n$ donne donc

$$\chi'(0) = (-1)^{n-1}\, n\, \kappa(\Gamma),$$

une égalité équivalente au résultat demandé.

En appliquant le résultat de la question 17 b), on peut vérifier le nombre d'arbres couvrants obtenu à la question 8 pour le graphe



La matrice laplacienne et sa comatrice sont ici

$$Q_\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{com}(Q_\Gamma) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

et l'on trouve bien $\kappa(\Gamma) = 8$.

Une conséquence classique du résultat établi dans la question 18 est le calcul du nombre d'arbres étiquetés à n sommets. Ici, on cherche à compter le nombre d'arbres dont l'ensemble des sommets est $[\![1, n]\!]$, autrement dit à déterminer le nombre $\kappa(K_n)$, où K_n est le graphe à n sommets tel que chaque paire de sommets est reliée par une arête. On vérifie sans peine que la matrice laplacienne est $Q_{K_n} = nI_n - J_n$. Les valeurs propres de J_n étant n (avec la multiplicité 1) et 0 (avec la multiplicité $n-1$), on obtient $\chi(X) = X(X-n)^{n-1}$, d'où $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Ce théorème a été découvert par Cayley en 1889 et peut être démontré de diverses manières.

19 a) Essayons de construire un 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) dans Γ. Il y a six possibilités pour x_0. Ce sommet étant choisi, il y a trois possibilités pour x_1, car de chaque sommet partent trois arêtes. Ces deux sommets x_0 et x_1 étant choisis, il y a alors deux possibilités pour x_2, car nous ne pouvons pas retourner sur nos pas. Enfin, il y a encore deux possibilités pour choisir x_3. Au total, cela nous donne $6 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$ choix possibles.

b) Il suffit de montrer que chaque 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) est conjugué par $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ au 3-arc $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$.

On peut trouver une puissance convenable du 6-cycle (123456) qui envoie x_0 sur s_1 ; cet élément de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ envoie alors le 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) sur un 3-arc de la forme (s_1, y_1, y_2, y_3).

Le sommet y_1 est relié à s_1 par une arête, donc $y_1 \in \{s_2, s_4, s_6\}$. Il existe ainsi un élément de $\{\mathrm{id}, (24), (26)\}$ qui envoie y_1 sur s_2. Cette permutation appartient à $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ et envoie (s_1, y_1, y_2, y_3) sur un 3-arc de la forme (s_1, s_2, z_2, z_3).

De la même façon, $z_2 \in \{s_3, s_5\}$, et en faisant éventuellement agir $(35) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, on envoie (s_1, s_2, z_3, z_4) sur un 3-arc de la forme (s_1, s_2, s_3, w_3). Enfin, $w_3 \in \{s_4, s_6\}$, et quitte à faire agir $(46) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, on envoie (s_1, s_2, s_3, w_3) sur le 3-arc γ.

En résumé, chaque élément de $\mathscr{A}$ appartient à l'orbite de γ sous le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

c) Le stabilisateur du 3-arc $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ dans $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est réduit à l'élément neutre. En effet, si σ appartient à ce stabilisateur, alors $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$ et $\sigma(4) = 4$. Ainsi $\sigma(5) \in \{5, 6\}$. Comme s_4 et s_5 sont reliés par une arête, $s_{\sigma(4)}$ et $s_{\sigma(5)}$ doivent aussi être reliés par une arête. Cela force $\sigma(5) = 5$ et par voie de conséquence $\sigma(6) = 6$.

La formule des classes et les questions a) et b) donnent alors immédiatement

$$|\mathrm{Aut}(\Gamma)| = |\mathrm{Aut}(\Gamma) \cdot \gamma| = |\mathscr{A}| = 72.$$

d) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Soit $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, comme ci-dessus. Nous avons vu dans la question b) qu'il existe un automorphisme σ' produit d'éléments dans

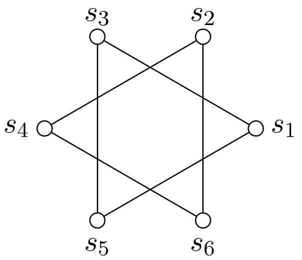
$$\Sigma = \{(123456), (24), (26), (35), (46)\}$$

qui envoie $\sigma \cdot \gamma$ sur γ, autrement dit tel que $\sigma' \cdot (\sigma \cdot \gamma) = \gamma$. Alors $\sigma' \circ \sigma$ appartient au stabilisateur de γ, donc $\sigma' \circ \sigma = \mathrm{id}$. Ceci montre que σ appartient au sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ engendré par Σ. Notons τ le 6-cycle (123456). Nous observons que

$$(24) = \tau \circ (13) \circ \tau^{-1}, \quad (26) = \tau^{-1} \circ (13) \circ \tau, \quad (35) = \tau^2 \circ (13) \circ \tau^{-2}, \quad (46) = \tau^3 \circ (13) \circ \tau^{-3}.$$

Par conséquent, le sous-groupe engendré par $\{\tau, (13)\}$ contient Σ, donc contient le sous-groupe engendré par Σ, donc est $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ tout entier.

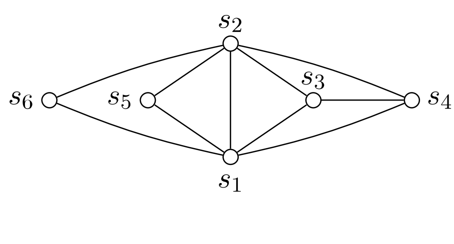
Il est en fait possible d'élucider la structure du groupe des automorphismes du graphe Γ de la question 19. En effet, formons le graphe ayant les mêmes sommets que Γ et ayant comme arêtes les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de Γ. Ce graphe, appelé complément de Γ, est l'union de deux triangles



et admet le même groupe d'automorphismes que Γ. Cette approche révèle que le stabilisateur des parties $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorphe au produit direct de deux copies du groupe $\mathfrak{S}_3$, que ce sous-groupe est distingué, et que le quotient est un groupe cyclique d'ordre 2. En fin de compte, on obtient une décomposition en produit semi-direct $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong (\mathfrak{S}_3)^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

20 Le groupe des automorphismes du graphe de gauche est clairement le groupe diédral d'ordre 8 ; il n'est pas commutatif et possède un (en fait deux) élément(s) d'ordre 4.

Pour étudier le groupe des automorphismes du graphe de droite, numérotons ses sommets comme suit.



Un automorphisme σ de ce graphe doit laisser stable $\{s_1, s_2\}$, car ce sont les deux sommets d'où partent cinq arêtes ; il doit laisser stable $\{s_3, s_4\}$, car ce sont les deux sommets d'où partent trois arêtes ; et il doit donc laisser stable $\{s_5, s_6\}$. Alors la restriction de σ^2 à chacune des trois parties $\{s_1, s_2\}$, $\{s_3, s_4\}$ et $\{s_5, s_6\}$ coïncide avec l'identité, et donc $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Ainsi le groupe des automorphismes de ce graphe ne contient pas d'élément d'ordre 4 et ne peut donc pas être isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

On peut aussi constater que le groupe du graphe ci-dessus est commutatif puisque tous ses éléments (autres que l'identité) sont d'ordre 2. De fait, ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

21 a) Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G. Alors $|G| = 2|H|$ et donc le complémentaire $G \setminus H$ de H dans G est de même cardinal que H.

Soit $a \in G$. Si $a \in H$, alors $aH = H = Ha$, et donc $aHa^{-1} = H$. Sinon, la classe à gauche aH ne rencontre pas H, donc est incluse dans le complémentaire $G \setminus H$ de H. La multiplication par a étant une opération bijective, on a $|aH| = |H|$; il vient alors $|aH| = |G \setminus H|$, ce qui entraîne que l'inclusion $aH \subset G \setminus H$ est une égalité. De même, la classe à droite Ha est égale à $G \setminus H$. Ainsi $aH = Ha$ et donc $aHa^{-1} = H$.

Ainsi $aHa^{-1} = H$ pour tout $a \in G$. Le sous-groupe H est donc bel et bien distingué.

b) Soit K un sous-groupe de G d'indice 2, a priori différent de H. Comme H est distingué, on peut considérer l'homomorphisme quotient $p : G \to G/H$; le groupe G/H est ici d'ordre 2.

Si K n'est pas inclus dans H, alors le sous-groupe $p(K)$ ne se réduit pas à l'élément neutre, donc est tout le groupe G/H. La restriction de p à K est donc un homomorphisme surjectif de groupes de noyau $H \cap K$, d'où $K/(H \cap K) \cong G/H$ d'après le théorème de factorisation. Il s'ensuit que $H \cap K$ est d'indice 2 dans K, donc est de cardinal 12 960, donc est différent de H et du sous-groupe réduit à l'élément neutre. Le sous-groupe K de G est distingué car d'indice 2, donc le sous-groupe $H \cap K$ de H est distingué. Comme H est simple, cela n'est pas possible.

Le cas où K n'est pas inclus dans H est donc impossible. Par conséquent K est inclus dans H, et lui est donc égal pour des raisons de cardinalité.

22 a) Avec les notations de la question, et en vertu de l'hypothèse faite sur G, le vecteur $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, considéré comme un vecteur colonne, est vecteur propre de G pour la valeur propre k.

b) Adoptons les notations de la question. Soit λ une valeur propre complexe de G et soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre de G pour la valeur propre λ. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_i| \geqslant |x_j|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Comme $\mathbf{x}$ est non nul, on a nécessairement $|x_i| > 0$. Notant $(g_{i,j})$ la famille des coefficients de G, la i-ème ligne de l'égalité $G\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

L'hypothèse faite sur G donne alors

$$|\lambda|\,|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} g_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}||x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}||x_i| = \left(\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}\right)|x_i| = k|x_i|.$$

Comme $|x_i| > 0$, on en déduit $|\lambda| \leqslant k$.

La matrice laplacienne Q_Γ du graphe Γ a été définie dans la partie II à l'aide d'une orientation de Γ, mais elle ne dépend pas de ce choix, comme nous l'avons démontré dans la question 15 a). Si le graphe Γ est k-régulier et a n sommets, alors $Q_\Gamma = kI_n - G_\Gamma$. Si de plus Γ est connexe, alors $\ker N_\Gamma$ est de dimension 1 (question 14), donc $\ker Q_\Gamma$ est de dimension 1 (question 15 b)). Il s'ensuit que k est valeur propre simple de la matrice G_Γ.

23 a) L'énoncé nous assure que k est valeur propre de G_Γ avec multiplicité 1. L'espace propre de G_Γ associé à cette valeur propre est donc une droite vectorielle, engendrée par le vecteur $(1,\dots,1)$ d'après la question 22 a). Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est colinéaire à ce vecteur, et est de norme euclidienne 1 puisque membre d'une base orthonormée. Cela nous donne deux possibilités : $\mathbf{v}_1 = \pm(1/\sqrt{n},\dots,1/\sqrt{n})$.

b) Introduisons la matrice P dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_p$, en coordonnées dans la base standard de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $v_{p,i}$ est le coefficient en position (i,p) de la matrice P pour tout $(i,p) \in [\![1,n]\!]^2$.

Le fait que $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_p)$ soit une base orthonormée se traduit par l'équation ${}^tP\,P = I_n$ (c'est-à-dire, P est une matrice orthogonale). Il s'ensuit que P est inversible, d'inverse ${}^tP$, d'où l'égalité $P\,{}^tP = I_n$. En évaluant le coefficient en position (i,i) de cette égalité, nous trouvons

$$\sum_{p=1}^{n} (v_{p,i})^2 = 1.$$

Alternativement, notons $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Cette base étant orthonormée, les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{v}$ dans cette base sont données par les produits scalaires $(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v})$. En particulier, $v_{p,i} = (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v}_p)$. D'un autre côté, la base $(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ est orthonormée, donc tout vecteur $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\mathbf{e} = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e})\mathbf{v}_p.$$

En prenant le produit scalaire avec $\mathbf{e}$, nous obtenons

$$(\mathbf{e} \mid \mathbf{e}) = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e})^2$$

(un cas particulier du théorème de Pythagore ou de l'égalité de Parseval). En remplaçant $\mathbf{e}$ par $\mathbf{e}_i$, nous obtenons le résultat demandé.

c) Soit $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbf{e}_i \mid G^m\,\mathbf{e}_j) = \left(\mathbf{e}_i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} g_{k,j}^{(m)}\,\mathbf{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} g_{k,j}^{(m)} (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_k) = g_{i,j}^{(m)}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{e}_j = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e}_j)\mathbf{v}_p = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,\mathbf{v}_p$$

par la démonstration de la question précédente. Par conséquent,

$$g_{i,j}^{(m)} = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,(\mathbf{e}_i \mid G^m\mathbf{v}_p) = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,\lambda_p^m\,(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v}_p) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^m\,v_{p,i}\,v_{p,j}.$$

Alternativement, les vecteurs colonnes de la matrice P définie ci-dessus sont des vecteurs propres de G_Γ et forment une base de $\mathbb{R}^n$, donc P est une matrice de passage permettant de diagonaliser G_Γ. Notant Λ la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont le i-ème coefficient diagonal est λ_i, nous avons ainsi $G_\Gamma = P\Lambda P^{-1}$, et alors $G_\Gamma^m = P\Lambda^m P^{-1}$. Dans la question précédente, nous avons établi que P est une matrice orthogonale, et il vient $G_\Gamma^m = P\Lambda^m\,{}^tP$, formule équivalente au résultat demandé.

d) Les questions a) et c) donnent

$$\frac{k^m}{n} = \lambda_1^m \, v_{1,i} \, v_{1,j} = g_{i,j}^{(m)} - \sum_{p=2}^{n} \lambda_p^m \, v_{p,i} \, v_{p,j}.$$

En prenant la valeur absolue, on en déduit

$$\left|\frac{k^m}{n}\right| \leqslant \left|g_{i,j}^{(m)}\right| + \sum_{p=2}^{n} |\lambda_p|^m \, |v_{p,i}| \, |v_{p,j}| \leqslant \left|g_{i,j}^{(m)}\right| + |\lambda_2|^m \sum_{p=2}^{n} |v_{p,i}| \, |v_{p,j}|.$$

On conclut en faisant appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{p=2}^{n} |v_{p,i}| \, |v_{p,j}| \leqslant \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,i})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,j})^2\right)^{1/2}$$

et en observant que la matrice G^m est à coefficients positifs ou nuls, car puissance positive d'une matrice à coefficients positifs ou nuls.

e) Les questions a) et b) montrent que pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons

$$\sum_{p=2}^{n} (v_{p,i})^2 = 1 - \frac{1}{n}.$$

Substituant dans le résultat de la question d), cela donne

$$g_{i,j}^{(m)} \geqslant \frac{k^m}{n} - |\lambda_2|^m \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{k^m - |\lambda_2|^m (n-1)}{n}.$$

Par conséquent $g_{i,j}^{(m)} > 0$ dès que $k^m > |\lambda_2|^m (n-1)$.

f) Montrons par récurrence sur $m \geqslant 1$ que les coefficients de la matrice G^m comptent le nombre de chemins de longueur m dans Γ d'extrémités données. La propriété est vraie pour $m = 1$, par définition de la matrice d'adjacence. Admettons-la pour m et prouvons-la pour $m + 1$.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ et $m \geqslant 1$, notons $X_{i,j}^{(m)}$ l'ensemble des chemins de longueur m reliant s_i à s_j. Un chemin de longueur $m + 1$ reliant s_i à s_j s'obtient en concaténant un chemin de longueur m reliant s_i à un sommet de Γ, disons s_k, et une arête $\{s_k, s_j\}$. Il y a ainsi une bijection de l'union disjointe des $X_{i,k}^{(m)}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\{s_k, s_j\}$ est une arête, sur $X_{i,j}^{(m+1)}$. Prenant les cardinaux, nous obtenons, en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition de la matrice d'adjacence

$$\left|X_{i,j}^{(m+1)}\right| = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \{s_k, s_j\} \text{ arête}}} \left|X_{i,k}^{(m)}\right| = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \{s_k, s_j\} \text{ arête}}} g_{i,k}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} g_{i,k}^{(m)} g_{k,j}^{(1)}.$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite le coefficient (i, j) de la matrice produit $G^m \cdot G$, et ainsi $g_{i,j}^{(m+1)} = \left|X_{i,j}^{(m+1)}\right|$.
Ceci établit notre propriété pour $m + 1$ et complète notre preuve par récurrence.

g) Adoptons les hypothèses et notations de l'énoncé. Alors

$$m \log\big(k/|\lambda_2|\big) > \log(n-1),$$

puisque $\log\bigl(k/|\lambda_2|\bigr) > 0$. L'exponentielle réelle étant une fonction strictement croissante, cela entraîne

$$(k/|\lambda_2|)^m > n-1.$$

D'après la question e), nous avons donc $g_{i,j}^{(m)} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La question f) traduit cela en le fait que deux sommets s_i et s_j de Γ sont toujours reliés par un chemin de longueur m, autrement dit que $\delta(s_i, s_j) \leqslant m$. Le diamètre de Γ est donc majoré par m.

Remarque : l'hypothèse $|\lambda_2| > 0$ est en fait ici inutile, car d'après la question 5 a), elle est une conséquence des autres hypothèses.