à regarder si les dernières questions de la partie (qui consistent souvent en une récapitulation ou mise en application sur un exemple des résultats théoriques acquis dans la partie) sont abordables en admettant les résultats précédents, soit à regarder s'il se sent plus à l'aise sur les parties suivantes.

3.2.3 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble les candidats admissibles ont traité les deux premières parties (I-A, I-B et II). Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions (chaque barre correspond à un item de correction).

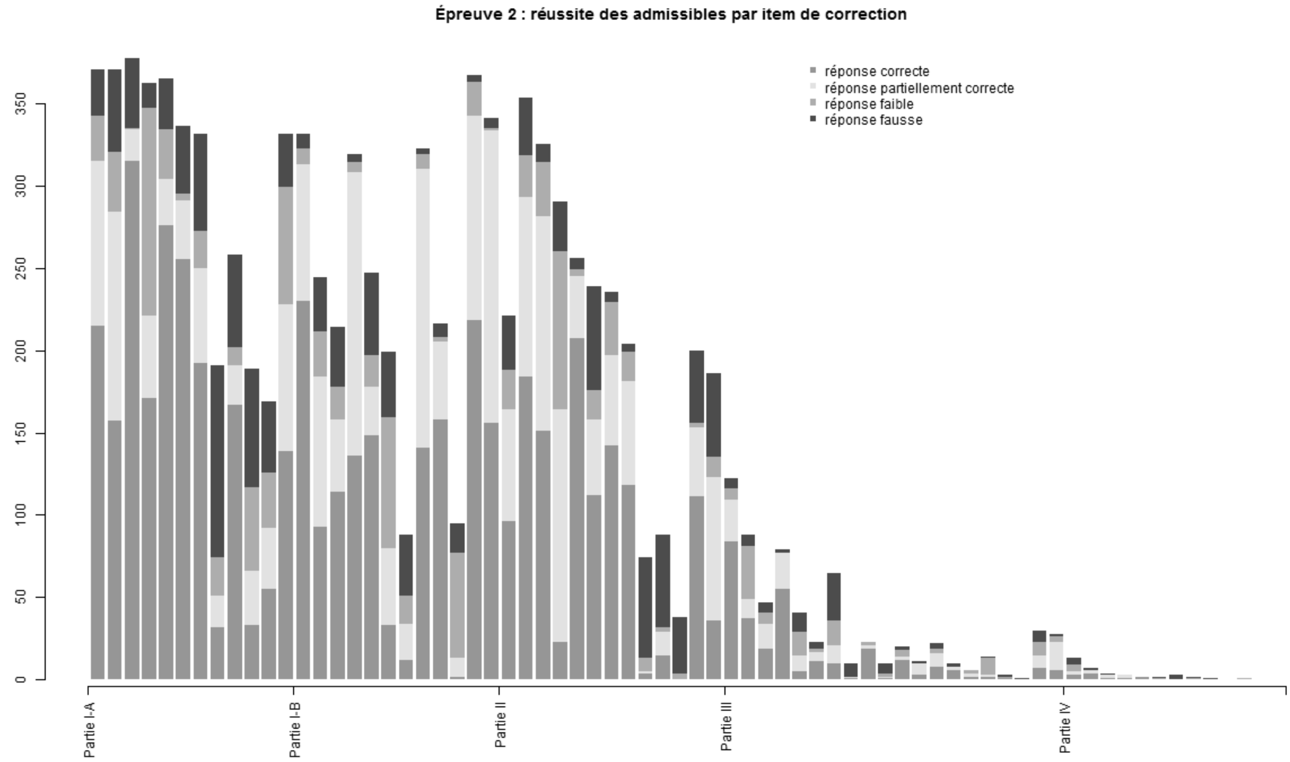

FIGURE 3.2 – Lecture : pour chaque question, la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.2.4 Commentaires par question

PARTIE I-A

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats mais a révélé de grandes lacunes sur la notion de borne inférieure et sa manipulation. Les correcteurs regrettent un manque de rigueur et de soin dès les premières questions. Il est bon de rappeler qu'en début de problème, il convient de mettre l'accent sur la précision des raisonnements. Les premières questions sont en effet très abordables, ce qui donne l'occasion aux candidats de montrer leurs capacités de rédaction. Bien sûr, il ne s'agit pas de tout détailler et de redémontrer des résultats de cours. Il faut trouver un juste milieu entre ne rien dire et trop en dire.

Les questions **1** et **2** ont été traitées par la majorité des candidats mais laissent apparaître une confusion entre minimum et borne inférieure. On rappelle que la manipulation des inégalités strictes demande beaucoup de soin. Il faut prendre garde à ne pas confondre A fermé et A compact. En outre, il n'y a pas, en général, unicité de la suite d'éléments qui converge vers un élément de l'adhérence.

La question **3-a** a fait l'objet d'erreurs fréquentes avec les quantificateurs et des confusions entre variables libres et variables muettes, par exemple en écrivant :
« $\forall (x,y) \in E^2, d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y) \leqslant d(x,y)$ » ou encore « $\inf_{b \in B} d(x,b) \leqslant d(x,y) + d(y,b)$ ».
D'une manière générale, il faut justifier les passages à la borne inférieure.

Dans la question **3-b**, il est bon de rappeler que l'aspect lipschitzien nécessite des valeurs absolues.

La question **4** a été assez peu abordée de manière significative, les argumentations demandant à être plus affinées.

Dans la question **5-a**, il faut prendre garde au fait que si $A \neq B$, il n'existe pas nécessairement d'élément $x \in B \setminus A$.

Dans la question **6**, on relève beaucoup de confusion au niveau des arguments de compacité. Il est bon de rappeler que le point clé est la continuité de $y \mapsto d(x,y)$ et la compacité de la partie non vide A.

La question **7** a donné lieu à beaucoup d'erreurs de raisonnement, s'expliquant par des confusions entre fermés et compacts.

La question **8** a été abordée par bon nombre de candidats. Rappelons que la négation d'être une partie ouverte n'est pas être une partie fermée. En outre une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé.

La question **9** a été assez peu abordée de manière significative. Quelques confusions sur la notion d'hyperplan ont été relevées.

Partie I-B

Dans la question **10**, largement abordée, certains candidats pensent simplifier les calculs en changeant de norme. Signalons que l'équivalence des normes sur $\mathbf{R}^n$ ne signifie pas qu'elles définissent la même norme d'opérateur sur $M_n(\mathbf{R})$.

La question **11** a mis en avant quelques erreurs de technicité. Rappelons que « $U \in M_n(\mathbf{R})$ est orthogonale » n'est pas équivalent à « $\det(U) \in \{-1, 1\}$ ».

La question **12** a donné lieu à quelques maladresses à cause de confusions : rappelons que le déterminant n'est pas une forme linéaire. En outre, le fait de savoir que l'image d'un ensemble A par une application continue est un fermé ne permet pas d'affirmer que l'ensemble A est un fermé. Enfin, rappelons que « $f(A) = F$ » n'est en général pas équivalent à « A est l'image réciproque de F par f ».

Les questions **13** et **14** ont été peu abordées de manière significative.

La question **15-a** a été traitée avec un manque de soin : l'usage de symboles de sommation sans indice provoque des confusions entre somme partielle et somme d'une série. Il faut prendre garde au fait que les majorations du type :

$$\| \sum_{k=0}^{n} A^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k$$

ne sont pas des arguments de convergence absolue.

Les questions **15-b** et **16** ont été peu abordées de manière significative.

Partie II

La question **17** étant une première question, elle demandait un soin particulier. On rappelle qu'il faut justifier la dérivabilité d'une fonction avant de calculer sa dérivée. En outre l'usage du théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de α mais pas l'unicité.

La question **18** a donné lieu à quelques confusions pour les rares copies qui l'ont abordée de manière significative : les candidats confondent régulièrement l'approximation de α à ε près et $|f'(x)| \leqslant \varepsilon$.

La question **19** a été abordée avec quelquefois des maladresses. Rappelons que f bornée ou f de limite nulle en $+\infty$ n'est pas une condition suffisante d'intégrabilité sur $[0, +\infty[$.

La question **20** a été abordée mais mal rédigée, avec des confusions très courantes entre f_n et $f_n(x)$, ce qui nuit à la clarté et à la précision des calculs.

La question **21** a été traitée mais avec un manque de soin dans les justifications. Beaucoup de candidats font l'interversion somme/intégrale sans aucun argument ; la plupart de ceux qui donnent un argument utilisent la convergence uniforme pour intervertir somme et intégrale, sans voir qu'on n'est pas sur un segment. Rappelons en outre que le théorème de convergence dominée s'applique pour les *suites* de fonctions et non les *séries* de fonctions (il faut dans ce cas l'appliquer aux sommes partielles).

Les questions **22** et **23** ont été abordées mais mal rédigées car celles-ci nécessitaient de bien citer les théorèmes sur la continuité des fonctions réciproques.

Les questions **24, 25** et **26** ont été très peu abordées de manière significative. Rappelons toutefois que la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone sur I est dérivable si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas sur I.

Parties III et IV

Ces parties ont été très peu abordées de manière significative à l'exception de la question **27**, où la réponse à la question était rappelée en préliminaire. On regrette la tendance au grappillage.

3.2.5 Éléments de correction

Cette section a pour objet de proposer aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Ces éléments de correction ne préfigurent pas les attentes du jury en matière de rédaction. Les candidats sont invités pour cela à se référer aux conseils donnés dans les sections précédentes et dans les rapports de jury antérieurs.

Partie I-A

1 $d_B \leqslant d_A$: Pour tout $x \in A \subset B$, on a par définition de $d_B(x)$, l'inégalité $d_B(x) \leqslant d_A(x)$, d'où le résultat.

2 Caractérisation de l'adhérence : Considérons un élément $x \in E$. On sait qu'il existe une suite minimisante $(a_n)_{n\in N}$ à valeurs dans A telle que $d(x, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d_A(x)$. La caractérisation séquentielle de l'adhérence de A fournit alors le résultat .

3-a $d_A(x) \leqslant d(x,y) + d_A(y)$: — Fixons x et y deux éléments de E. Pour tout $a \in A$, on a

$$d_A(x) \leqslant d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a).$$

Il en résulte que pour tout $a \in A$, on peut écrire

$$d_A(x) - d(x,y) \leqslant d(y,a),$$

et par suite

$$d_A(x) - d(x,y) \leqslant d_A(y) \qquad \text{soit} \qquad d_A(x) \leqslant d(x,y) + d_A(y).$$

3-b d_A lipschitzienne : — Fixons x et y deux éléments de E. On a $d_A(x) - d_A(y) \leqslant d(x,y)$ et en échangeant leurs rôles , il vient $d_A(y) - d_A(x) \leqslant d(x,y)$, d'où on en déduit

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant d(x,y).$$

Le résultat annoncé en découle.

4 $d_A = d_{\overline{A}}$: — Fixons x un élément de E. Comme on a $A \subset \overline{A}$, on peut déjà écrire l'inégalité $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$. Par ailleurs, considérons $\varepsilon > 0$.
Il existe $a_\varepsilon \in \overline{A}$ tel que : $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d(x, a_\varepsilon) \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2$. En outre, il existe $a \in A$ tel que $d(a_\varepsilon, a) \leqslant \varepsilon/2$. On en déduit que :

$$d_A(x) \leqslant d(x,a) \leqslant d(x,a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, a) \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon,$$

ie $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$, inégalité valable, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité annoncée.

5-a $d_A = d_B$ ssi $A = B$: — Le sens $A = B \implies d_A = d_B$ est évident. Supposons $d_A = d_B$ et considérons $x \in A$. Alors on a successivement $d_A(x) = 0 = d_B(x)$ et par suite $x \in \overline{B} = B$, car B est fermé, d'où $A \subset B$ et par symétrie, $A = B$.

5-b $d_A = d_B$ ssi $\overline{A} = \overline{B}$: — Comme $d_A = d_{\overline{A}}$ et $d_B = d_{\overline{B}}$, on peut écrire que $d_A = d_B$ ssi $d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}}$ ie, puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermées, ssi $\overline{A} = \overline{B}$.

6 Cas A compact non vide : — Considérons x dans E.
L'application $y \mapsto d(x,y)$ est continue sur le compact A donc elle admet un minimum sur A.
En particulier, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) = \min\limits_{y\in A} d(x,y) = d_A(x)$.

7 Cas E affine euclidien : — Fixons x un élément de E et $r = 1 + d(x,A)$.
Considérons $B_F(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r.
La définition de $d(x,A)$ permet de voir que :

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) = \inf_{a\in A\cap B_F(x,r)} d(x,a) \ .$$

Comme E est de dimension finie, l'ensemble $A \cap B_F(x,r)$ est compact et l'on a alors

$$d(x,A) = \inf_{a\in A\cap B_F(x,r)} d(x,a) = \min_{a\in A\cap B_F(x,r)} d(x,a),$$

du fait que l'application $y \mapsto d(x,y)$ est continue sur E, d'où le résultat annoncé.

8-a A est fermé : — En effet, pour x un point adhérent à A, on a $d_A(x) = d(x,A) = 0$. Les hypothèses sur A assurent que $x \in A$ et donc que A est fermé.