

## Partie I-A

**1  $d_B \leq d_A$  :** Pour tout  $x \in A \subset B$ , on a par définition de  $d_B(x)$ , l'inégalité  $d_B(x) \leq d_A(x)$ , d'où le résultat.

**2 Caractérisation de l'adhérence :** Considérons un élément  $x \in E$ . On sait qu'il existe une suite minimisante  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que  $d(x, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_A(x)$ . La caractérisation séquentielle de l'adhérence de  $A$  fournit alors le résultat .

**3-a  $d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$  :** — Fixons  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ . Pour tout  $a \in A$ , on a

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Il en résulte que pour tout  $a \in A$ , on peut écrire

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a),$$

et par suite

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d_A(y) \quad \text{soit} \quad d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

**3-b  $d_A$  lipschitzienne :** — Fixons  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$ . On a  $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$  et en échangeant leurs rôles , il vient  $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$ , d'où on en déduit

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Le résultat annoncé en découle.

**4  $d_A = d_{\overline{A}}$  :** — Fixons  $x$  un élément de  $E$ . Comme on a  $A \subset \overline{A}$ , on peut déjà écrire l'inégalité  $d_{\overline{A}}(x) \leq d_A(x)$ . Par ailleurs, considérons  $\varepsilon > 0$ .

Il existe  $a_\varepsilon \in \overline{A}$  tel que :  $d_{\overline{A}}(x) \leq d(x, a_\varepsilon) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2$ . En outre, il existe  $a \in A$  tel que  $d(a_\varepsilon, a) \leq \varepsilon/2$ . On en déduit que :

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, a) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon,$$

ie  $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$ , inégalité valable, pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'où l'égalité annoncée.

**5-a  $d_A = d_B$  ssi  $A = B$  :** — Le sens  $A = B \implies d_A = d_B$  est évident. Supposons  $d_A = d_B$  et considérons  $x \in A$ . Alors on a successivement  $d_A(x) = 0 = d_B(x)$  et par suite  $x \in \overline{B} = B$ , car  $B$  est fermé, d'où  $A \subset B$  et par symétrie,  $A = B$ .

**5-b  $d_A = d_B$  ssi  $\overline{A} = \overline{B}$  :** — Comme  $d_A = d_{\overline{A}}$  et  $d_B = d_{\overline{B}}$ , on peut écrire que  $d_A = d_B$  ssi  $d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}}$  ie, puisque  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont fermées, ssi  $\overline{A} = \overline{B}$ .

**6 Cas  $A$  compact non vide :** — Considérons  $x$  dans  $E$ .

L'application  $y \mapsto d(x, y)$  est continue sur le compact  $A$  donc elle admet un minimum sur  $A$ .

En particulier, il existe  $a \in A$  tel que  $d(x, a) = \min_{y \in A} d(x, y) = d_A(x)$ .

**7 Cas  $E$  affine euclidien :** — Fixons  $x$  un élément de  $E$  et  $r = 1 + d(x, A)$ .

Considérons  $B_F(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

La définition de  $d(x, A)$  permet de voir que :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a) .$$

Comme  $E$  est de dimension finie, l'ensemble  $A \cap B_F(x, r)$  est compact et l'on a alors

$$d(x, A) = \inf_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a) = \min_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a),$$

du fait que l'application  $y \mapsto d(x, y)$  est continue sur  $E$ , d'où le résultat annoncé.

**8-a  $A$  est fermé :** — En effet, pour  $x$  un point adhérent à  $A$ , on a  $d_A(x) = d(x, A) = 0$ . Les hypothèses sur  $A$  assurent que  $x \in A$  et donc que  $A$  est fermé.

**8-b A est un intervalle fermé :** — Nous allons établir la convexité de  $A$ . Si  $A$  est un singleton, le résultat est immédiat.

Sinon considérons  $(u, v) \in A^2$  avec  $u < v$ . Montrons que  $[u, v]$  est contenu dans  $A$ .

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de  $w \in ]u, v[$  tel que  $w \notin A$ .

Les ensembles  $S = [u, w] \cap A$  et  $T = [w, v] \cap A$  sont des compacts non vides.

On peut donc poser  $\alpha = \max S$  et  $\beta = \min T$  de telle sorte que  $\alpha < w < \beta$  et  $[\alpha, \beta] \cap A = \{\alpha, \beta\}$ .

Le réel  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$  vérifie alors

$$d(\gamma, A) = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta| = \frac{\beta - \alpha}{2},$$

de sorte que cette dernière distance est atteinte en deux points distincts de  $A$ , ce qui constitue une contradiction. En conclusion,  $A$  est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ .

**9 Expression de  $d_H(x)$  :** — Pour tout  $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} |a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b| &= |(a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b) - (a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b)| \\ &= |a_1(x_1 - y_1) + \dots + a_n(x_n - y_n)| \\ &\leq \|a\| \|x - y\|, \end{aligned}$$

avec un cas d'égalité lorsque  $y = p_H(x)$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $H$ . Le résultat annoncé en découle.

## Partie I-B

**10-a Expression de  $\|u\|$  :** — Considérons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  telles que  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n^2,$$

avec un cas d'égalité pour  $x = e_n$ , d'où le résultat annoncé.

**10-b Expression de  $\|A\|$  :** — Cela découle du fait que  $A$  et  $u$  ont le même spectre.

**11-a Existence de  $C$  :** — Les matrices  ${}^tMM$  et  $I_n$  sont congruentes donc  ${}^tMM$  est symétrique définie positive. Il existe donc  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que :

$${}^tMM = {}^tUDU = U^{-1}DU.$$

On considère  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  et on pose  $C = {}^tU\Delta U$ . Les matrices  $C$  et  $\Delta$  sont congruentes donc  $C$  est symétrique définie positive. En outre, on a bien :

$$C^2 = ({}^tU\Delta U)^2 = (U^{-1}\Delta U)^2 = U^{-1}\Delta^2 U = U^{-1}DU = {}^tMM,$$

d'où le résultat.

**11-b Existence de  $U$  :** — Comme  $C$  est inversible, on peut poser  $U = MC^{-1}$ .

On a bien  $M = UC$  avec successivement :

$${}^tUU = {}^t(MC^{-1})MC^{-1} = {}^t(C^{-1}){}^tMMC^{-1} = C^{-1}{}^tMMC^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I_n,$$

d'où le résultat annoncé.

**12-a  $\mathcal{F}$  est fermé :** — L'application déterminant est continue sur  $M_n(\mathbb{R})$  comme fonction polynomiale à plusieurs lettres. Il en découle que  $\mathcal{F} = \det^{-1}(\{1\})$  est fermée comme image réciproque d'une partie fermée de  $\mathbb{R}$  par une application continue.

**12-b  $\mathcal{F}$  n'est pas compact :** — Notons  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la famille des matrices élémentaires de  $M_n(\mathbb{R})$ . La suite  $M_p = I_n + pE_{12}$  est à valeurs dans  $\mathcal{F}$  et est non bornée. Il en découle que  $\mathcal{F}$  n'est pas borné et *a fortiori* non compact.

**13  $d(\mathbf{0}_n, \mathcal{F}) = 1$  :** — Considérons  $M$  une matrice de  $\mathcal{F}$ .

Introduisons sa décomposition polaire  $M = UC$  avec  $U$  orthogonale et  $C$  symétrique réelle  $> 0$ .

On a facilement  $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$ , puis on peut écrire :

$$\|M\| = \|UC\| \leq \|U\| \|C\| = \|C\| \quad \text{et} \quad \|C\| = \|U^{-1}M\| \leq \|U^{-1}\| \|M\| = \|M\|,$$

ce qui fournit  $\|M\| = \|C\|$ . Par ailleurs, on a

$$\det(C)^2 = \det(C^2) = \det({}^tMM) = \det(M)^2 = 1.$$

Comme  $\det(C) > 0$ , on en déduit que  $\det(C) = 1$ . Ces dernières égalités donnent  $\|M\| = \|C\| \geq 1$ , en vertu du fait que  $C$  a au moins l'une de ses valeurs propres supérieure ou égale à 1.

On a un cas d'égalité pour  $M = I_n$ , d'où le résultat annoncé.

**14 Cas d'égalité :** — Le cas d'égalité  $\|M\| = 1$  dans ce qui précède conduit à  $\|C\| = 1$ , d'où le spectre de  $C$  est alors contenu dans  $]0, 1]$ . Comme  $\det(C) = 1$ , on en déduit que chaque valeur propre de  $C$  est égale à 1, et puisque  $C$  est diagonalisable, on peut écrire que  $C = I_n$  ou encore que  $M \in SO_n(\mathbb{R})$ .

On a donc établi que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{F}$  en lesquelles cette distance est atteinte est  $SO_n(\mathbb{R})$ .

**15-a Relation souhaitée :** — On peut écrire que  $\|A^p\| \leq \|A\|^p$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Le membre de droite étant le terme général d'une série géométrique convergente, on a la convergence absolue demandée.

En outre, on a du fait de la continuité de la multiplication matricielle :

$$(I_n - A) \sum_{p=0}^{\infty} A^p = \sum_{p=0}^{\infty} (A^p - A^{p+1}) = I_n,$$

d'où le résultat annoncé.

**15-b Implication souhaitée :** — Fixons  $T \in GL_n(\mathbb{R})$ . Introduisons  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $H = T - M$  vérifie :  $\|H\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ . Alors on peut écrire

$$M = T - H = T(I_n - T^{-1}H).$$

Comme on a

$$\|T^{-1}H\| \leq \|T^{-1}\| \|H\| < 1,$$

la matrice  $I_n - T^{-1}H$  est inversible et par suite  $M$  est inversible, d'où le résultat.

**16  $d(T, \mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$  :** — Ce qui précède montre que si  $M$  est singulière, on a

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|T - M\|.$$

On va déterminer une matrice  $M \in \mathcal{S}$  pour laquelle on a égalité.

Introduisons  $T = UC$  la décomposition polaire de  $T$  avec  $U$  orthogonale et  $C$  symétrique réelle à valeurs propres strictement positives.

On peut écrire  $C = {}^tP \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$  où  $P$  est orthogonale et  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $C$ . À l'aide de ce qui précède, on en déduit comme en **13** que

$$\|T^{-1}\| = \|C^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_1}.$$

L'inégalité précédente devient un cas d'égalité pour le choix de

$$M = U {}^tP \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P$$

qui est bien une matrice singulière, d'où le résultat annoncé.

## Partie II

**17-a Variation de  $f$  :** — La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  avec :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2} \quad \text{où} \quad g(x) = e^x(1 - x) + 1.$$

Comme  $g'(x) = -xe^x$ , on a les variations suivantes pour  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'$	$+$	$0$	$-$
$g$	$\nearrow > 0 \searrow$ $1 \qquad \qquad \qquad -\infty$		

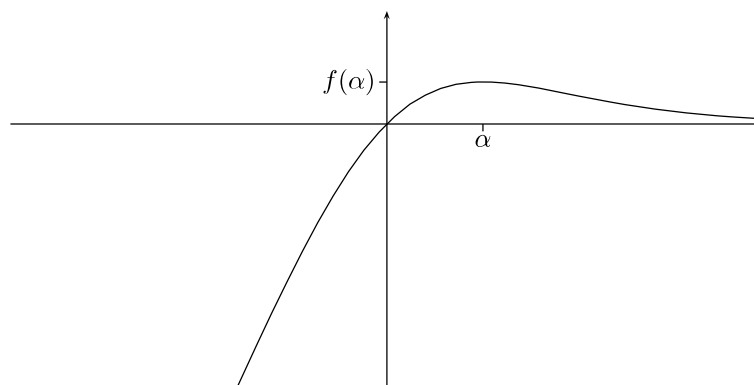
qui met en évidence, par le théorème de la bijection sur  $[0, +\infty[$ , l'existence d'un unique réel  $\alpha \in ]1, 2[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ , du fait que  $g(1) = 1 > 0$  et  $g(2) = 1 - e^2 < 0$ .

On en déduit les variations suivantes pour  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow f(\alpha) \searrow$ $-\infty \qquad \qquad \qquad 0$		

et donc  $f$  présente en  $\alpha$  un maximum.

**17-b Représentation de  $\Gamma$  :** —



**18 Implémentation de alpha :** — On a vu que  $g$  est strictement décroissante sur  $[1, 2]$  et s'annule en  $\alpha$ . Commençons par définir  $g$  :

```
Fonction g(x)
retourner (1-x)*expo(x)+1
```

On procède à la recherche d'un zéro de  $g$  par dichotomie sur  $[1, 2]$ .

```

procédure alpha(epsilon)
  Initialiser a à 1
  Initialiser b à 2
  tant b-a>epsilon
    faire
      début de boucle
      m=(a+b)/2
      si g(m)>0
        a<-m
      sinon
        b<-m
      fin de boucle
  renvoyer (a+b)/2

```

**19  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  :** — La fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  avec

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} \underset{+\infty}{=} O(e^{-x/2}).$$

Comme  $x \mapsto e^{-x/2}$  est continue intégrable sur  $[0, +\infty[$ , le résultat en découle.

**20 Relation souhaitée :** — Le résultat est clair à l'origine. Sinon, pour  $x > 0$ , la série proposée est géométrique de raison  $-e^{-x} \in ]-1, 1[$  donc elle converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{2xe^{-x}}{1+e^{-x}} = f(x).$$

**21 Calcul demandé :** — Par des arguments analogues à ci-dessus, on vérifie que chaque  $f_n$  est  $C^0$  intégrable sur  $]0, +\infty[$  avec :

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \int_0^{+\infty} 2te^{-(n+1)t} dt = \frac{2}{(n+1)^2},$$

ie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f_n|$  converge. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p+2)^2} \right).$$

On a successivement :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

et

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{3}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

**22-a CNS d'équidistance à  $\Delta$  :** — Pour tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , on a  $d(M, \Delta) = |y|$ . Si  $M_1$  et  $M_2$  sont de coordonnées respectives  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , on a  $y_1 = f(x_1)$  et  $y_2 = f(x_2)$  et donc

$$d(M_1, \Delta) = d(M_2, \Delta) \iff |y_1| = |y_2| \iff |f(x_1)| = |f(x_2)|,$$

d'où le résultat.

**22-b Existence de  $\varphi$  :** — Considérons  $x \in ]0, \alpha]$ . Un point  $N$  de  $\Gamma$  d'abscisse  $y \geq \alpha$  vérifie donc la condition

requis si et seulement si :  $|f(x)| = |f(y)|$  ie  $f(x) = f(y)$ .

La fonction  $f$  est continue et ses variations assurent que  $f(x) \in ]0, f(\alpha)]$  puis qu'elle induit une bijection de  $[\alpha, +\infty[$  sur  $]0, f(\alpha)]$ . On en déduit l'existence d'un unique réel  $y \in [\alpha, +\infty[$  tel que  $f(y) = f(x)$ .

Le point  $N$  de  $\Gamma$  d'abscisse  $y$  répond donc à la question.

**23-a Expression de  $\varphi$  :** — La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ses variations assurent que  $f_1$  est strictement croissante et réalise une bijection de  $]0, \alpha]$  sur  $]0, f(\alpha)]$  puis que  $f_2$  est strictement décroissante et réalise une bijection de  $[\alpha, +\infty[$  sur  $]0, f(\alpha)]$ . Pour tout  $(x, y) \in ]0, \alpha] \times [\alpha, +\infty[$ , on peut écrire :

$$f(x) = f(y) \iff f_1(x) = f_2(y) \iff f_2^{-1}(f_1(x)) = y,$$

ie que l'on a l'expression  $\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$ .

**23-b Continuité de  $\varphi$  :** — Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  étant continues, la réciproque de  $f_2$  est continue puis par théorème de composition, la fonction  $\varphi$  est continue. Les règles de composition et de monotonie assurent que  $\varphi$  est strictement décroissante, que  $\varphi(\alpha) = \alpha$  puis que  $\varphi(x) = f_2^{-1}(f_1(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ .

**24 Équivalent en 0 :** — En partant de la relation  $f(\varphi(x)) = f(x)$ , il vient :

$$\frac{2x}{1 + e^x} = \frac{2\varphi(x)}{1 + e^{\varphi(x)}}.$$

On a donc au voisinage de l'origine :  $x \underset{0}{\sim} 2\varphi(x)e^{-\varphi(x)}$ , du fait que  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ .

En passant au logarithme, on peut écrire :  $\ln(x) \underset{0}{\sim} -\varphi(x)$ , soit  $\varphi(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ .

**25 Régularité de  $\varphi$  :** — Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont strictement monotones de classe  $C^\infty$  puis  $f_2'$  ne s'annule pas sur  $[\alpha, +\infty[$ . Ainsi  $f_2^{-1} : ]0, f(\alpha)] \rightarrow [\alpha, +\infty[$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, f(\alpha)[$  puis par théorème de composition, la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, \alpha[$ .

**26 Dérivabilité de  $\varphi$  en  $\alpha$  :** Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure du fait que  $f'(\alpha) = 0$ . On va raisonner directement. Remarquons que  $f''(\alpha) \neq 0$ .

En effet, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x)(e^x + 1)^2 = 2g(x),$$

où  $g$  désigne la fonction introduite à la réponse 17-b. D'où par dérivation, il vient

$$f''(\alpha)(e^\alpha + 1)^2 = 2g'(\alpha) = -2\alpha e^\alpha < 0.$$

On en déduit qu'autour de  $\alpha$ , on a :  $f(x) - f(\alpha) \sim \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(\alpha)$ , puis, comme  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \alpha$ , il vient

$f(\varphi(x)) - f(\alpha) \sim \frac{(\varphi(x) - \alpha)^2}{2} f''(\alpha)$ . La relation  $f(\varphi(x)) = f(x)$  conduit à

$$\frac{(\varphi(x) - \alpha)^2}{2} f''(\alpha) \sim \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(\alpha) \quad \text{ie} \quad \varphi(x) - \alpha \sim -(x - \alpha),$$

d'où  $\varphi$  est dérivable en  $\alpha$ , avec  $\varphi'(\alpha) = -1$ .

### III : Courbe médiatrice de deux fermés dans $\mathbb{R}^2$

**27-a Cas d'un point et d'une droite.** — On suppose que  $A = \{a\}$  où  $a \in \mathcal{P}^+$  et que  $B$  est une droite horizontale. Il est bien connu que l'ensemble des points équidistants de  $a$  et de  $B$  est la parabole de foyer  $a$  et de directrice  $B$ .

**27-b Cas  $A = \{(0, 1)\}$  et  $B = \{(-1, -1), (1, -1)\}$ .** — Nous poserons  $a = (0, 1)$ ,  $b_1 = (-1, -1)$  et

$b_2 = (1, -1)$ . L'axe des ordonnées constitue la médiatrice de  $[b_1, b_2]$  (cf figure 1), donc pour  $m = (x, y) \in \mathcal{P}$ , on a

$$d_B(m) = \begin{cases} d(m, b_1), & \text{pour } x \leq 0 \\ d(m, b_2), & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} .$$

Notons  $\varphi_{a,b}$  la fonction dont le graphe sur  $\mathbb{R}$  est la médiatrice de  $[a, b]$ , pour tout  $b \in \mathcal{P}^-$ . On voit alors que  $\Gamma_{A,B}$  est l'ensemble des points du graphe de la fonction  $\sup(\varphi_{a,b_1}, \varphi_{a,b_2})$ .

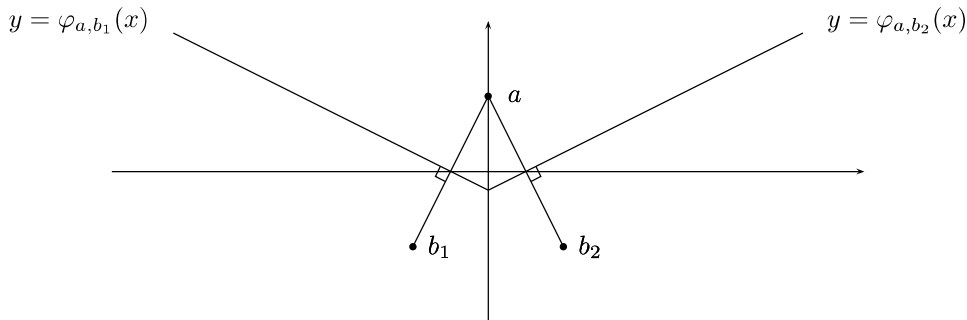


Figure 1

**28-a Majoration souhaitée.** — Les hypothèses permettent d'avoir  $d_A(x_0, t) \leq d((x_0, t), a)$  puis  $d_B(x_0, t) \geq t$ , pour tout  $t \geq 0$ . Le résultat en découle.

**28-b Existence de  $t_0$ .** — Introduisons un point  $a = (a_1, a_2)$  de  $A$ . On peut écrire :  $(\forall t \in \mathbb{R})$ ,

$$d((x_0, t), a)^2 - t^2 = (d((x_0, t), a) - t)(d((x_0, t), a) + t) = -2ta_2 + (x_0 - a_1)^2 + a_2^2,$$

ce qui fournit la relation demandée pour le choix de

$$\lambda = 2a_2 > 0 \quad \text{et} \quad \mu = -((x_0 - a_1)^2 + a_2^2).$$

D'après ce qui précède, on a pour tout  $t > 0$

$$\Phi_{x_0}(t) \leq d((x_0, t), a) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d((x_0, t), a) + t}.$$

Le dernier membre est strictement négatif pour  $t > 0$  assez grand puisque  $\lambda > 0$ , d'où le résultat.

**28-c  $\Phi_{x_0}$  prend des valeurs  $> 0$ .** — Si  $b = (b_1, b_2) \in B$ , on a de même  $b_2 < 0$  et pour  $t < 0$

$$\Phi_{x_0}(t) \geq \frac{2tb_2 - (x_0 - b_1)^2 - b_2^2}{d((x_0, t), b) + |t|}.$$

La fonction  $\Phi_{x_0}$  prend donc des valeurs strictement positives pour  $t < 0$  avec  $|t|$  assez grand.

**28-d Existence de  $y_0$ .** La fonction  $\Phi_{x_0}$  est continue comme composée d'applications continues. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de  $y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$ .

**28-e  $\Phi_{x_0}(y) > 0$ .** Le point  $m$  est situé sur l'axe :  $x = x_0$  strictement sous  $m_0$ . (cf figure 2)

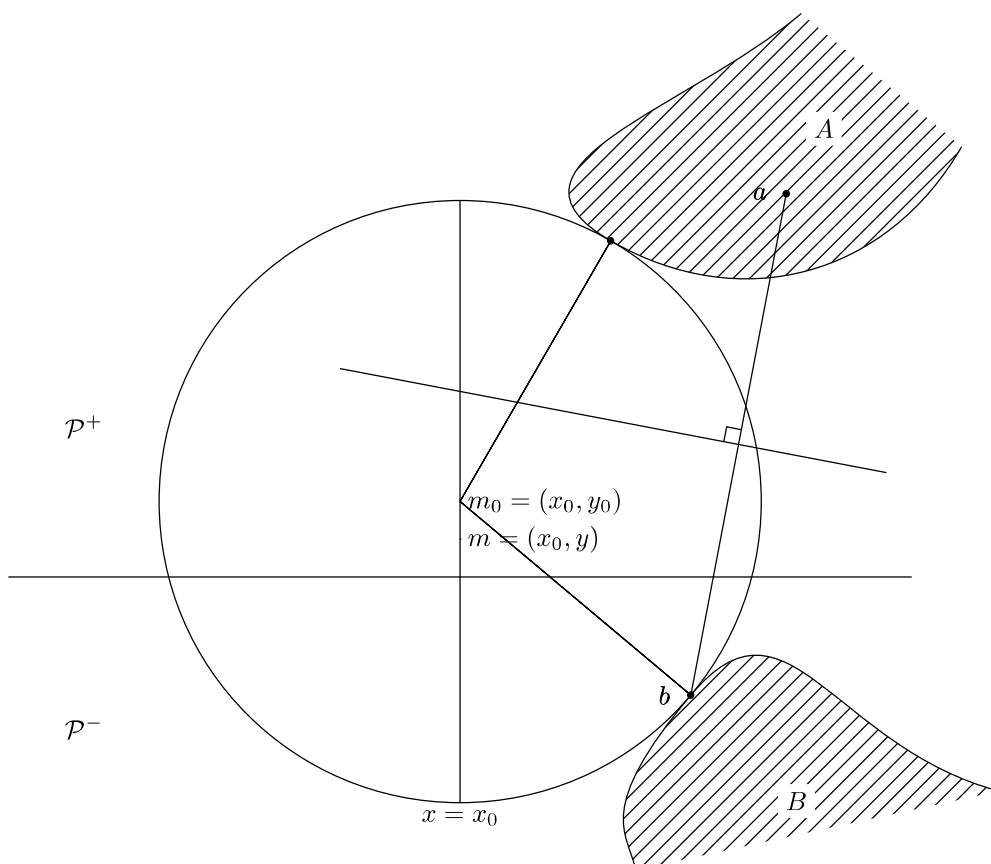


Figure 2

On a  $d_A(m_0) = d_B(m_0)$  et l'on peut déjà écrire que  $d_B(m) \leq d(m, b)$ .

Considérons un point  $a \in A$ . Comme on a  $d(m_0, b) \leq d(m_0, a)$ , les points  $m_0$  et  $b$  sont sous la médiatrice du segment  $[a, b]$ , qui selon les hypothèses n'est pas vertical. En particulier, le point  $m$  est strictement sous cette médiatrice et donc  $d(m, b) < d(m, a)$ .

Comme il existe  $a' \in A$  tel que  $d_A(m) = d(m, a')$ , on en déduit que  $d_B(m) \leq d(m, b) < d_A(m)$ , puis que  $\Phi_{x_0}(y) > 0$ , d'où le résultat annoncé.

**28-f Existence de  $\varphi_{A,B}$ .** — De manière symétrique, on vérifie que pour  $y > y_0$ , on a  $\Phi_{x_0}(y) < 0$ .

On en déduit que pour tout réel  $x$ , il existe un unique réel  $y = \varphi_{A,B}(x)$  tel que l'élément  $(x, y) \in \Gamma_{A,B}$ . Il en résulte que  $\varphi_{A,B} : x \mapsto \varphi_{A,B}(x)$  constitue une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont le graphe est exactement la courbe médiatrice de  $A$  et  $B$ .

**29 Convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .** — Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists p > n) \text{ tel que } |u_p - \sigma| \geq \varepsilon.$$

Introduisons l'application  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par récurrence comme suit :

Il existe  $\psi(0) > 0$  tel que  $|u_{\psi(0)} - \sigma| \geq \varepsilon$ . Supposons  $\psi(0), \dots, \psi(n-1)$  définie pour  $n \geq 1$  tel que  $0 < \psi(0) < \dots < \psi(n-1)$  avec  $|u_{\psi(k)} - \sigma| \geq \varepsilon$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Il existe alors un entier  $\psi(n) > \psi(n-1)$  tel que  $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$ , d'où  $\psi$  vérifie la propriété précédente jusqu'au rang  $n$ . L'application  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est alors strictement croissante et met en évidence une suite extraite  $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, elle admet une valeur d'adhérence qui sera la même que la valeur d'adhérence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et donc  $\sigma$  est une valeur d'adhérence de  $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , ce qui contredit  $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Il en découle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$ .



**30-a Existence de  $P_1$  et  $P_2$ .** — Les inégalités vues en **28-b-c** montrent que, avec les mêmes notations

$$\frac{(x_0 - b_1)^2 + b_2^2}{2b_2} \leq y_0 \leq \frac{(x_0 - a_1)^2 + a_2^2}{2a_2}.$$

On en déduit que les polynômes

$$P_1 = \frac{1}{2b_2}((X - b_1)^2 + b_2^2) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2a_2}((X - a_1)^2 + a_2^2)$$

vérifient les propriétés requises.

**30-b  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.** — Les fonctions polynômes associées à  $P_1$  et  $P_2$  étant continues, on a  $P_1(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_1(x)$  et  $P_2(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_2(x)$ . Les inégalités :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad P_1(x_n) \leq y_n \leq P_2(x_n),$$

assurent que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**30-c Unicité demandée.** — La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut considérer  $\mu$  l'une de ses valeurs d'adhérence.

Il existe donc une suite extraite  $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $\mu$ . Les fonctions  $d_A$  et  $d_B$  sont continues car lipschitziennes et l'on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad d_A(x_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}) = d_B(x_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}).$$

Un passage à la limite conduit donc à  $d_A(x, \mu) = d_B(x, \mu)$  et par suite  $\mu = \varphi_{A,B}(x)$ .

La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et admet  $\varphi_{A,B}(x)$  pour unique valeur d'adhérence, d'où le résultat demandé.

**30-d Continuité de  $\varphi_{A,B}$ .** — La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et admet  $\varphi_{A,B}(x)$  pour unique valeur d'adhérence. D'après le résultat vu en **29**, on a  $y_n = \varphi_{A,B}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi_{A,B}(x)$ , ce qui assure la continuité de  $\varphi_{A,B}$  au point  $x$ , propriété vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , d'où le résultat.

**31 Exemple demandé.** — On prend  $A = \{(0, 1)\}$  et  $B$  l'axe d'équation  $y = -1$ . La courbe médiatrice est la parabole d'équation  $y = x^2/4$  et donc  $\varphi_{A,B} : x \mapsto \frac{x^2}{4}$ . La fonction  $\varphi_{A,B}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  à dérivée non bornée, donc elle n'est pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .

**32-a Compacité de  $\Gamma'$ .** — Le graphe  $\Gamma'$  est compact comme l'image du compact  $I$  par l'application continue  $x \mapsto (x, \varphi_{A,B}(x))$ .

**32-b Existence de  $R_0$ .** — L'application  $d_A$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  donc elle est bornée sur le compact  $\Gamma'$ , d'où le résultat.

**32-c Existence de  $R$ .** — Notons  $S$  la boule fermée de rayon  $R_0$ , centrée à l'origine. L'application définie sur le compact  $\Gamma' \times S$  par  $(m, u) \mapsto m + u$  est continue donc est bornée. L'existence du réel  $R$  en découle.

**33 Propriétés de  $K_A$  et  $K_B$ .** — Les ensembles  $K_A$  et  $K_B$  sont compacts comme intersection d'un fermé et d'un compact.

Tout disque fermé de rayon  $R_0$  centré sur  $\Gamma'$  rencontre  $A$  et  $B$  puis est contenu dans  $B_F(0, R)$ . Il en résulte que  $K_A$  et  $K_B$  sont non vides. En outre, on a  $K_A \subset A \subset \mathcal{P}^+$  et  $K_B \subset B \subset \mathcal{P}^-$ .

Introduisons  $x_0$  un point de  $I$  et posons  $m_0 = (x_0, \varphi_{A,B}(x_0))$ . Il existe  $(a_0, b_0) \in A \times B$  tel que

$$d_A(m_0) = d(m_0, a_0) = d_B(m_0) = d(m_0, b_0).$$

La définition de  $R$  assure que  $(a_0, b_0) \in K_A \times K_B$  puis que  $d_A(m_0) = d_{K_A}(m_0)$  et  $d_B(m_0) = d_{K_B}(m_0)$ .

On en déduit que  $m_0$  est sur la ligne médiatrice de  $K_A$  et  $K_B$  et que  $\Gamma'$  est le graphe de la ligne médiatrice de  $K_A$  et  $K_B$  sur  $I$ .

**34  $\psi$  est lipschitzienne sur  $J$ .** — Si  $\Gamma$  est le graphe d'une fonction dans  $\mathcal{R}_\theta$ , où l'on a choisi  $\delta(\theta)$  comme premier axe, on en déduit que  $\Gamma$  ne présente aucune corde dans une direction perpendiculaire à  $\delta(\theta)$ , pour tout

$\theta \in ]-\rho, \rho[$ . Cela impose alors que l'on a  $0 < \rho < \frac{\pi}{2}$ . On en déduit que la pente d'une corde de  $\Gamma$  est contenue dans l'intervalle  $[-\cotan(\rho), \cotan(\rho)]$  et que  $\psi$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $J$  avec  $k = \cotan(\rho)$ .

**35  $\varphi_{A,B}$  est lipchitzienne sur  $I$ .** — Le résultat précédent a permis de se ramener au cas où en plus  $A$  et  $B$  sont compacts, ce que nous supposons dans toute cette question. On peut par translation se ramener au cas où  $A$  et  $B$  sont contenus dans le demi-plan

$$\{(x, y) \in \mathcal{P} ; x > 0\}.$$

Il est facile de voir que l'on peut trouver deux rectangles pleins ouverts (voir figure 3)

$$\mathcal{R}_A = \{(x, y) \in \mathcal{P} ; 0 < \alpha_A < x < \beta_A, 0 < \lambda_A < y < \mu_A\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{R}_B = \{(x, y) \in \mathcal{P} ; 0 < \alpha_B < x < \beta_B, \lambda_B < y < \mu_B < 0\}$$

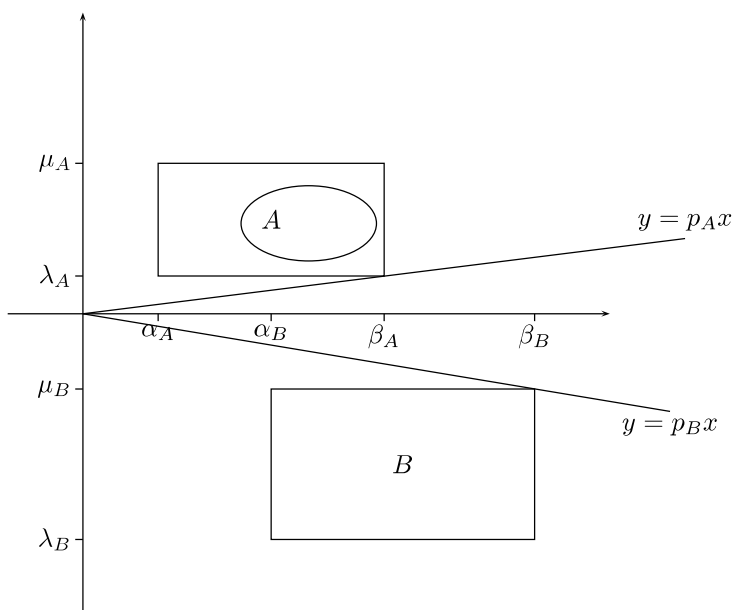


Figure 3

contenant respectivement  $A$  et  $B$ .

La droite  $\delta(p)$  passant par l'origine dont la pente est  $p \in [p_B, p_A]$ , où

$$p_A = \frac{\lambda_A}{\beta_A} \quad \text{et} \quad p_B = \frac{\mu_B}{\beta_B},$$

sépare au sens stricte  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire délimite deux demi-plans ouverts contenant respectivement  $A$  et  $B$ , de manière analogue à l'axe des abscisses. La ligne médiatrice de  $A$  et  $B$  est alors le graphe d'une fonction dans tout repère orthonormé directe où l'on a choisi  $\delta(p)$  comme premier axe, pour tout  $p \in [p_B, p_A]$ . Le résultat est alors une conséquence de la propriété établie dans la question précédente.

#### Partie IV

**36-a Premier résultat.** — Notons  $a = (0, a_1)$  et  $B = [\alpha, 0] \times [\beta, \gamma]$  où  $\alpha < 0$  et  $\beta < \gamma < 0$ .

On peut alors introduire deux sommets  $b_1 = (\alpha, \gamma)$ ,  $b_2 = (0, \gamma)$  du rectangle  $B$ , la droite  $\Delta_\gamma = (b_1 b_2)$  puis  $\delta_{a, b_1}$  et  $\delta_{a, b_2}$  les médiatrices respectives des segments  $[a, b_1]$  et  $[a, b_2]$ . (voir figure 4)

On voit facilement que les points situés au dessous de  $\Delta_\gamma$ , à gauche de  $b_1$  (resp. à droite de  $b_2$ ) restent strictement sous les médiatrices  $\delta_{a, b_1}$  et  $\delta_{a, b_2}$ . Ces points sont donc strictement plus proche de  $B$  que de  $a$  et ne sont pas sur  $\Gamma_{A,B}$ .

Enfin si  $m$  est un point situé sous le segment  $[b_1, b_2]$ , toute arête qui joint  $m$  à  $a$  rencontre  $[b_1, b_2]$  et donc

vérifie  $d_B(m) < d_A(m)$ . Le résultat en découle.

**36-b Détermination de  $\Gamma_{A,B}$ .** — Ce qui précède montre que  $\Gamma_{A,B}$  est située au dessus de  $\Delta_\gamma$ .

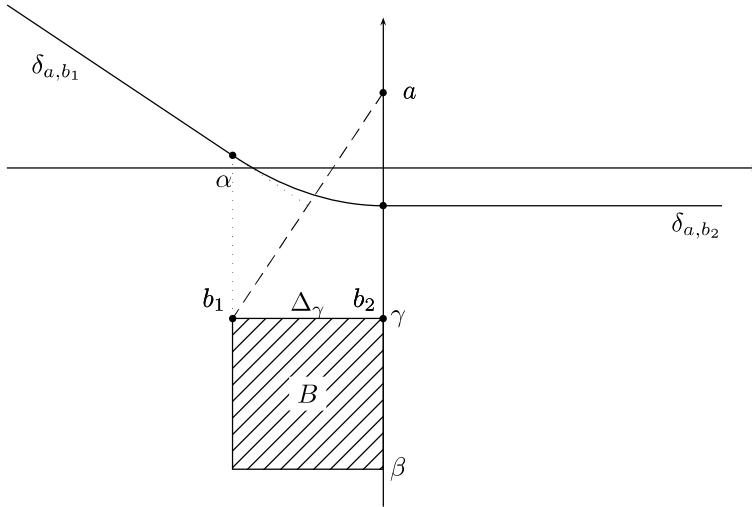


Figure 4

Avec les notations précédentes, on a successivement pour tout point  $m = (x, y)$  situé au dessus de  $\Delta_\gamma$  :

$$d_B(m) = \begin{cases} d(m, b_1), & \text{pour } x \leq \alpha \\ d(m, \Delta_\gamma), & \text{pour } \alpha \leq x \leq 0 \\ d(m, b_2), & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} \quad . \text{ (voir figure 4)}$$

Introduisons les fonctions  $\varphi_{a,b_1}, \varphi_{a,b_2}$  et  $\varphi_{a,\Delta_\gamma}$  dont les graphes respectifs sont  $\delta_{a,b_1}, \delta_{a,b_2}$  et la parabole de foyer  $a$  et de directrice  $\Delta_\gamma$ . Notons  $\Lambda$  l'enveloppe supérieure de ces trois fonctions.

L'expression de  $d_B$  sur ce demi-plan assure alors l'égalité  $\Lambda = \Gamma_{A,B}$ .

**36-c Dérivabilité.** — Seuls les points de raccord posent un problème.

La tangente en un point  $m$  de l'arc de parabole est la médiatrice de  $[a, h]$ , où  $h$  est la projection orthogonale de  $m$  sur  $[b_1, b_2]$ . On en déduit la dérivabilité de  $\varphi_{A,B}$ .

**37 Équivalence.** — La caractérisation vue en **III-28-e** donne pour tout  $m = (x, y) \in \mathcal{P}$ ,

$$(d_A(m) \leq d_B(m)) \implies (y \geq \varphi_{A,B}(x)) \quad \text{et} \quad (d_A(m) \geq d_B(m)) \implies (y \leq \varphi_{A,B}(x)),$$

d'où le résultat demandé.

**38-a  $\varphi_{a,b} \leq \varphi_{a,B}$ .** — Considérons un réel  $x_0$ , puis posons  $y_0 = \varphi_{a,B}(x_0)$  et  $m_0 = (x_0, y_0)$ .

Pour tout élément  $b \in B$ , on peut écrire

$$d(a, (x_0, \varphi_{a,b}(x_0))) = d(b, (x_0, \varphi_{a,b}(x_0))) \geq d_B(x_0, \varphi_{a,b}(x_0))$$

donc par la caractérisation ci-dessus, on en déduit  $\varphi_{a,b}(x_0) \leq y_0 = \varphi_{a,B}(x_0)$ , d'où le résultat.

**38-b  $\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{a,B}$ .** — Gardons les notations précédentes. L'ensemble  $B$  est fermé donc on peut introduire

$b_0$  un point de  $B$  tel que  $d(m_0, b_0) = d_B(m_0)$ . Alors on a  $\varphi_{a,b_0}(x_0) = y_0$  d'où on en déduit

$$\sup_{b \in B} \varphi_{a,b}(x_0) = \max_{b \in B} \varphi_{a,b}(x_0) = \varphi_{a,B}(x_0),$$

et le résultat annoncé.

**39  $\inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{A,B}$ .** — Considérons un réel  $x_0$ , posons  $y_0 = \varphi_{A,B}(x_0)$  et  $m_0 = (x_0, y_0)$ .

Pour tout  $a \in A$ , on a

$$d_B(x_0, \varphi_{a,B}(x_0)) = d(a, (x_0, \varphi_{a,B}(x_0))) \geq d_A(x_0, \varphi_{a,B}(x_0))$$

et donc par la caractérisation ci-dessus, on a

$$\varphi_{a,B}(x_0) \geq y_0 = \varphi_{A,B}(x_0).$$

On en déduit que pour tout  $a \in A$ , on a  $\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} \geq \varphi_{A,B}$  et l'existence de  $\inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b}$ .

Par ailleurs, si  $a_0$  est un point de  $A$  tel que  $d(m_0, a_0) = d_A(m_0) = d_B(m_0)$ , on a  $\varphi_{a_0,B}(x_0) = y_0$ .

Il en découle

$$\inf_{a \in A} \varphi_{a,B}(x_0) = \min_{a \in A} \varphi_{a,B}(x_0) = \varphi_{A,B}(x_0),$$

et le résultat annoncé. L'autre égalité s'obtient de manière analogue.

**40-a Existence de  $p(t)$ .** — Considérons un réel  $t$ .

Traitons l'unicité. Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , la droite d'équation :  $x = ty + u$  s'appuie sur  $A$  à droite si et seulement si, pour tout  $(x, y) \in A$ ,  $x - ty \leq u$  avec au moins un cas d'égalité. Il en résulte qu'un réel  $u$  vérifie les propriétés requises si et seulement si  $u = \max_{(x,y) \in A} (x - ty)$ .

Traitons l'existence. L'application  $(x, y) \mapsto x - ty$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble  $A$  est un compact non vide donc  $p(t) = \max_{(x,y) \in A} (x - ty)$  est un réel bien défini. Le résultat demandé en découle.

**40-b  $p$  est lipchitzienne.** — Supposons que  $A$  et  $B$  soient contenus dans le carré  $[-k, k]^2$ , où  $k > 0$ . Nous allons établir que  $p$  est  $k$ -lipschitzienne, donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

On peut écrire, pour tout  $(x, y) \in A$  et  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$x - sy = x - ty + (t - s)y \leq p(t) + |s - t|k,$$

ce qui assure  $p(s) \leq p(t) + k|s - t|$ , puis  $p(s) - p(t) \leq k|s - t|$ . En échangeant le rôle de  $s$  et  $t$ , il vient pour  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|p(t) - p(s)| \leq k|s - t|$ , d'où le résultat annoncé.

**40-c Dernière propriété.** — Considérons des réels  $s$  et  $t$  tels que  $s < t$ . Introduisons  $(x_0, y_0) \in A$  tel que  $p(t) = x_0 - ty_0$ . Comme  $y_0 > 0$ , on peut écrire

$$p(t) = x_0 - ty_0 < x_0 - sy_0 \leq p(s),$$

ce qui assure que  $p$  est strictement décroissante. En outre,  $A$  étant compact, les hypothèses assurent l'existence de  $\mu > 0$  tel que  $A$  soit situé au dessus de la droite  $y = \mu$ .

Pour tout réel  $t$ , il existe  $(x(t), y(t)) \in A$  tel que  $x(t) = ty(t) + p(t)$ . En gardant les notations de **5-b**, on peut donc écrire

$$\begin{cases} p(t) \geq -k - t\mu, & \text{pour } t < 0 \\ p(t) \leq k - t\mu, & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad ,$$

et par suite  $p(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty$  et  $p(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ .

Le théorème de la bijection assure que  $p$  est un homéomorphisme strictement décroissant de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**41 Existence de  $\delta$ .** — On introduit de manière analogue la fonction définie sur  $\mathbb{R}$

$$q : t \mapsto \max_{(x,y) \in B} (x - ty).$$

Pour tout  $t$  réel,  $q(t)$  est l'unique réel tel que la droite d'équation :  $x = ty + q(t)$  s'appuie sur  $B$  à droite. On vérifie de même que  $q$  constitue un homéomorphisme strictement croissant de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Le problème équivaut à montrer l'existence d'un unique réel  $\theta$  tel que  $p(\theta) = q(\theta)$ .

Les propriétés de  $p$  et  $q$  assurent que  $q - p$  est un homéomorphisme strictement croissant de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Le résultat en est une conséquence directe.

**42 Existence de  $[m_A, m_B]$ .** — La définition de  $\delta$  assure que  $F_A = \delta \cap A$  et  $F_B = \delta \cap B$  sont des compacts disjoints non vides de la droite  $\delta$ .

On peut alors jusqu'à la fin de cette question se placer dans un repère orthonormal  $\mathcal{R}_1$  dont l'axe des abscisses est  $\delta$ , avec  $F_A \subset \{(x_1, y_1) \in \mathcal{P} ; x_1 \leq 0\}$  et  $F_B \subset \{(x_1, y_1) \in \mathcal{P} ; x_1 \geq 0\}$ .

Le compact  $F_A$  de la droite  $\delta$  admet un unique point d'abscisse maximale  $m_A = (a_A, 0)$  et le compact  $F_B$

admet un unique point d'abscisse minimale  $m_B = (b_B, 0)$ .

On peut donc écrire pour tout point  $a = (a_1, 0)$  de  $F_A$  et  $b = (b_1, 0)$  de  $F_B$ ,

$$d(a, b) = b_1 - a_1 \geq b_B - a_A = d(m_A, m_B),$$

avec égalité si et seulement si  $a = m_A$  et  $b = m_B$ . Le segment  $[m_A, m_B]$  vérifie les propriétés requises.

**43  $\delta'$  est asymptote à  $\Gamma_{A,B}$ .** — Pour  $(a, b) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$ , notons  $\delta_{a,b}$  la médiatrice du segment  $[a, b]$  et  $p_{a,b}$  sa pente. La droite  $\delta'$  admet une équation du type :  $y = ux + v$ , avec  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$  un réel assez petit,  $b_\varepsilon$  le point de  $\delta$  tel que celui-ci reste contenu dans  $\mathcal{P}^-$  et tel que  $\Delta_\varepsilon$  la droite d'équation  $y = ux + v + \varepsilon$  soit la médiatrice du segment  $[m_A, b_\varepsilon]$ . (voir figure 5)

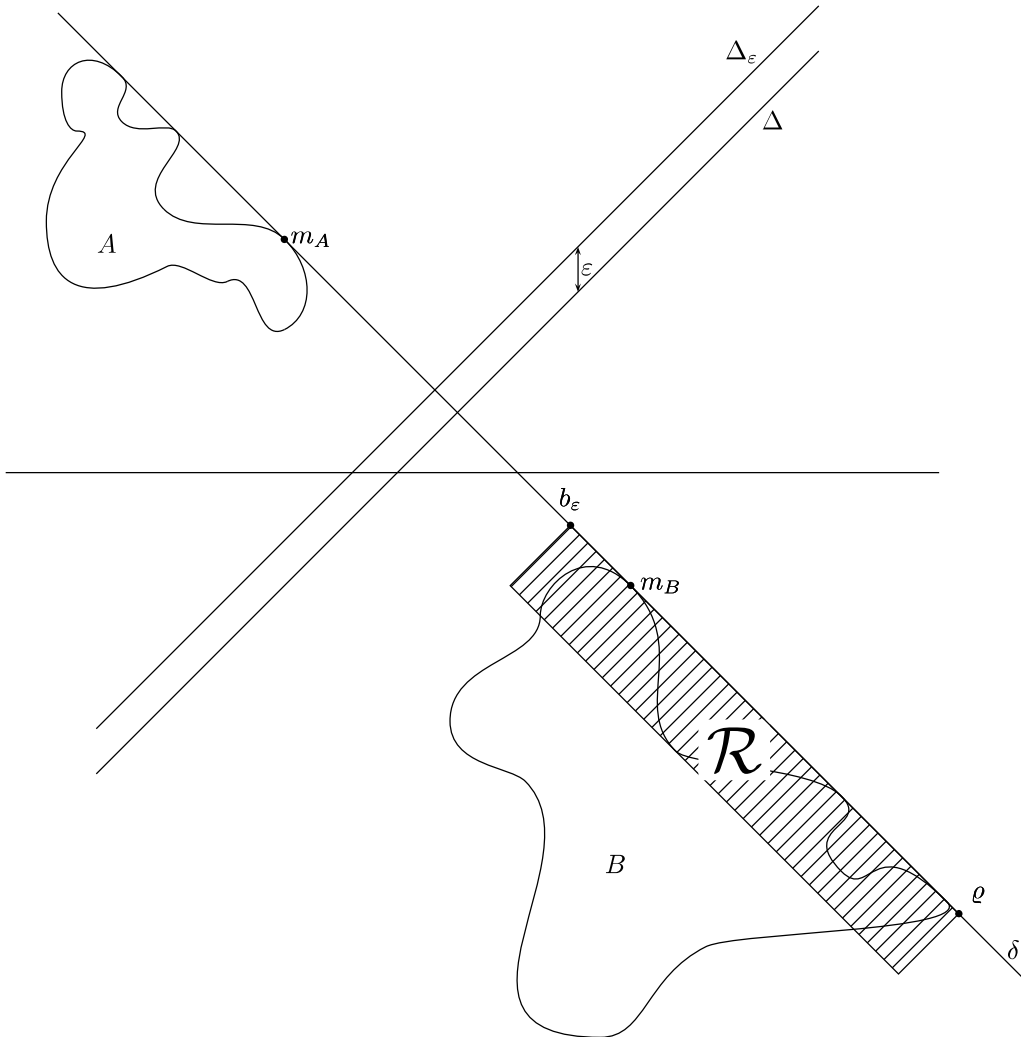


Figure 5

Considérons à gauche de  $\delta$  dans  $\mathcal{P}^-$ , un rectangle plein  $\mathcal{R}$  dont l'un des cotés est un segment  $[b_\varepsilon, \varrho]$  de  $\delta$ , contenant  $\delta \cap B$  dans son intérieur. On a déjà

$$\varphi_{A,B} \leq \varphi_{m_A,B} = \sup_{b \in B} \varphi_{m_A,b}.$$

Pour un point  $b \in \mathcal{R} \cap B$ , on peut écrire

$$\varphi_{m_A,b} \leq \sup_{b' \in \mathcal{R}} \varphi_{m_A,b'} = \varphi_{m_A,\mathcal{R}}.$$

D'après la question **36**, il existe un réel  $\eta_1 \geq 0$  tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta_1) \implies \varphi_{m_A,\mathcal{R}}(x) = ux + v + \varepsilon.$$

Par ailleurs, notons  $K_\varrho$  l'adhérence de  $B \setminus \mathcal{R}$ . D'après le choix du rectangle  $\mathcal{R}$ ,  $K_\varrho$  est un compact de  $\mathcal{P}$  qui ne rencontre pas  $\delta$ . Supposons que  $K_\varrho$  est non vide.

Alors pour  $b \in K_\varrho$ , on vérifie que  $p_{m_A, b} < p_{m_A, m_B}$  puis  $\delta_{m_A, b}$  rencontre  $\Delta_\varepsilon$  en un unique point  $\varrho_b$ . En particulier, pour tout  $b \in K_\varrho$ , si  $\varrho_{b,1}$  est l'abscisse de  $\varrho_b$  dans  $\mathcal{H}$ , on a :

$$(\forall x \geq \varrho_{b,1}), \quad \varphi_{m_A, b}(x) \leq ux + v + \varepsilon.$$

L'application  $b \mapsto \varrho_{b,1}$  étant clairement continue sur  $K_\varrho$ , on peut définir  $\eta_2 = \max_{b \in K_\varrho} \varrho_{b,1}$ .

On a alors, en posant  $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$ , (si  $K_\varrho$  est vide, on pose  $\eta = \eta_1$ )

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta) \implies \varphi_{A, B}(x) \leq ux + v + \varepsilon.$$

En échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ , on obtient de manière analogue l'existence d'un réel  $\eta' \geq 0$  tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta') \implies \varphi_{A, B}(x) \geq ux + v - \varepsilon,$$

ce qui assure  $\varphi_{A, B}(x) - (ux + v) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et le résultat annoncé.

## RÉFÉRENCE

Michel Wirth (professeur honoraire de mathématiques au lycée Charlemagne de Paris) :

Courbe médiatrice de deux fermés

## Chapitre 4

# Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours.

Elles supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples illustratifs, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés dont la liste est donnée au chapitre 5. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». D'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui. Enfin, la préparation des candidats à l'oral ne doit pas se limiter à la seule étude des sujets proposés car les questions du jury portent sur tout le programme et abordent des notions connexes.

Le déroulement des épreuves orales n'a pas évolué en 2018 et sera reconduit en 2019.

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu, sauf exception, sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent une enveloppe contenant soit deux sujets (au choix) d'algèbre et géométrie soit deux sujets (au choix) d'analyse et probabilités. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent une enveloppe contenant deux sujets (au choix) dans le domaine complémentaire (analyse et probabilités si le domaine de l'exposé était en algèbre et géométrie et vice-versa). Outre l'accès libre à la bibliothèque de l'agrégation (cf. liste des ouvrages chapitre 6), les candidats bénéficient de ressources numériques dans la salle de préparation : programmes scolaires et documents ressources, rapport du jury, programme du concours, photocopies numériques<sup>1</sup>. Ils ont également la **possibilité d'apporter leurs propres ouvrages sous réserve que ces derniers soient commercialisés**<sup>2</sup> avec un numéro

---

1. Liste publiée à l'adresse l'adresse suivante : <http://agrinst.agreg.org/accueil.html>

2. Les impressions de livres numériques ne sont pas autorisées.