Partie I

On fixe deux matrices $A$ et $B$, éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**1.** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}\right) = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}_+$

**2.** **a)** Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $v = (v_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$.

$$\overline{Av} = \overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}v_k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}} = \left(\overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k}v_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}}\,\overline{v_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \overline{A}\overline{v}$$

**b)** Notons $\varphi$ l'application de l'énoncé.

- $\triangleright$ $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, donc $\varphi$ est involutive et bijective.
- $\triangleright$ $\varphi(I_n) = I_n$.
- $\triangleright$ Soient $(A,B) = \left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Alors, $\varphi(\lambda A + \mu B) = \left(\overline{\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \underset{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}{=} \left(\lambda\overline{a_{i,j}} + \mu\overline{b_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$.
- $\triangleright$ Soit $(A,B) = \left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

$$\varphi(AB) = \left(\overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}}\,\overline{b_{k,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \varphi(A)\varphi(B)$$

**c)** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n \overline{a_{\sigma(j),j}} = \det\left(\overline{A}\right)$$

**d)** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, $\det(A) \neq 0$. Ainsi,

$$\det\left(A\overline{A}\right) = \det(A)\det\left(\overline{A}\right) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 > 0$$

**3.** **a)** Il suffit de choisir $\eta := \min\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}} |\lambda|$ où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $A$ *si $A$ admet au moins une valeur propre non nulle* et $\eta := 2018$ sinon.

**b)** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\eta > 0$ donné par la question $(a)$. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On choisit la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \|A\| := \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

On fixe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k_0} < \eta$ (possible car $\dfrac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$). Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|\left(A - \frac{1}{k_0+k}I_n\right) - A\right\| = \left\|-\frac{1}{k_0+k}I_n\right\| = \frac{1}{k_0+k} \quad \text{et} \quad A - \frac{1}{k_0+k}I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Donc,

$$\left\|\left(A - \frac{1}{k_0+k}I_n\right) - A\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, $\left(A - \dfrac{1}{k_0+k}I_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers $A$.

**4.** **a)**

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}$$

**b)** $\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\right) = 1$, et $\overline{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)} \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(\overline{B}A^{-1}B + \overline{A}) \\
&= \det(A)\det\left(\overline{A}\left(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n\right)\right) \\
&= |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})
\end{aligned}$$

où on a posé $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$.

**5.** $\boxed{(1) \implies (2)}$ Supposons (1) vraie. Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (il est important d'introduire $C$ en premier pour s'assurer que $C$ est quelconque)

Posons $A := I_n$ et $B := \overline{C}$. Alors, $A$ est inversible et $C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$. Donc, d'après 4.b,

$$\det(I_n + C\overline{C}) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$$

d'après l'hypothèse.

$\boxed{(2) \implies (1)}$ Supposons (2) vraie. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. On conserve la norme choisie précédemment.

- ▷ Supposons d'abord $A$ inversible. Alors, en posant $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$, on a

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$$

  d'après l'hypothèse.
- ▷ Si $A$ n'est pas inversible, on introduit une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers $A$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & \overline{A_k} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

  On conclut par passage à la limite, en utilisant la continuité du déterminant, de la conjugaison et le fait que $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

## Partie II

**6. a)** $AB = A\,(BA)\,A^{-1}$. Donc, $AB$ et $BA$ sont semblables et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**b)** On considère une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers $A$.
D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$.
Par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie), $A_kB \xrightarrow[k\to\infty]{} AB$ et $BA_k \xrightarrow[k\to\infty]{} BA$.
Par ailleurs, la fonction $\chi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array}$ est continue :
En effet, on pose, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M =: \sum_{k=0}^{n} a_k(M)X^k$ et on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme du max des modules des coefficients (encore une fois, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Comme les $M \mapsto a_k(M)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont polynomiales en les coefficients de la matrice, elles sont continues. D'où la continuité.
Donc, par passage à la limite, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**c)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\chi_{C\overline{C}}(\lambda)} = \overline{\det(\lambda I_n - C\overline{C})} = \det\left(\overline{\lambda I_n - C\overline{C}}\right) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \det\left(\lambda I_n - \overline{C}C\right) = \chi_{\overline{C}C}(\lambda) = \chi_{C\overline{C}}(\lambda)$$

Donc, les polynômes $\overline{\chi_{C\overline{C}}}$ et $\chi_{C\overline{C}}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est infini. Donc, $\overline{\chi_{C\overline{C}}} = \chi_{C\overline{C}}$. Ainsi, $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

**7.** $\chi_{C\overline{C}}$ annule $C\overline{C}$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton et est scindé à racines simples par hypothèse. Donc, $C\overline{C}$ est diagonalisable. Les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

**8.** **a)** $C\overline{C}v = \lambda v$, donc

$$\overline{C}C\overline{v} = \overline{C\overline{C}v} = \overline{\lambda v} \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\overline{v}$$

**b)**

$$C\overline{C}C\overline{v} = C\left(\lambda\overline{v}\right) = \lambda C\overline{v}$$

Donc, $C\overline{v} \in E_\lambda(C\overline{C})$ et $E_\lambda(C\overline{C})$ est une droite vectorielle dirigée par $v$ (car $v \neq 0$, puisque $v$ est un vecteur propre).

Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $C\overline{v} = \mu v$.

**c)**

$$C(\overline{\mu}\,\overline{v}) = \overline{\mu}C\overline{v} = \overline{\mu}\mu v = |\mu|^2\, v \quad \text{et} \quad C(\overline{\mu}\,\overline{v}) = C(\overline{\mu v}) = C\left(\overline{C\overline{v}}\right) = C\overline{C}v = \lambda v$$

Comme $v \neq 0$, $\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}_+$.

**9.** $\chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme à coefficients réels qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-^*$ d'après la question 8. Il est donc de signe constant sur cet intervalle. Or,

$$\chi_{C\overline{C}}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^n$$

Ainsi, $\chi_{C\overline{C}}$ a le signe de $(-1)^n$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Donc,

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = (-1)^n \det\left(-I_n - C\overline{C}\right) = (-1)^n\chi_{C\overline{C}}(-1) \geqslant 0$$

## Partie III

**10.** Soit $(U,V) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} u_k X^k, \sum_{l=0}^{q-1} v_l X^l\right) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$(U,V) = (U,0) + (0,V) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k(X^k,0) + \sum_{l=0}^{q-1} v_l(0,X^l) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$$

$\mathscr{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X]$ qui comporte $r+q = \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right)$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

**11.** Soient $((U_1,V_1),(U_2,V_2)) \in \left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\alpha(U_1,V_1) + \beta(U_2,V_2)\right) &= \varphi(\alpha U_1 + \beta U_2, \alpha V_1 + \beta V_2) = P(\alpha U_1 + \beta U_2) + Q(\alpha V_1 + \beta V_2)\\ &= \alpha(PU_1 + QV_1) + \beta(PU_2 + QV_2)\\ &= \alpha\varphi(U_1,V_1) + \beta\varphi(U_2,V_2)\end{aligned}$$

**12.** Pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, $\varphi(X^j,0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k X^{k+j}$ et pour tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, $\varphi(0,X^j) = \displaystyle\sum_{l=0}^{r-1} b_k X^{k+j}$.

Donc,

$$M = \mathrm{Syl}(P,Q)$$

**13.** **a)** Soit $(U,V) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc, $PU + QV = 0$, d'où $-PU = QV$.

Donc, $P$ divise $QV$. Or, $P \wedge Q = 1$. Donc, $P$ divise $V$ (lemme de Gauss).

Si $V \neq 0$, alors $q - 1 \geqslant \deg(V) \geqslant \deg(P) = q$. Absurde. Donc, $V = 0$. De même, $U = 0$.

Ainsi, $\varphi$ est injective.

**b)** $\varphi$ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension. C'est donc un isomorphisme. Ainsi, $M$ est inversible. Donc,

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \det\left(\mathrm{Syl}(P,Q)\right) = \det(M) \neq 0$$

**14.** Supposons que $\varphi$ soit injective. Alors, $\varphi$ est un isomorphisme. Ainsi, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X]$ vérifiant $PU+QV=1$. Donc, $P\wedge Q=1$ d'après le théorème de Bézout. Absurde. Ainsi, $\varphi$ n'est pas injective. Donc, $\mathrm{Syl}(P,Q)$ n'est pas inversible et son déterminant est nul.

**15.**

$$\Delta(P) \quad = \quad \frac{(-1)^{\frac{2\times1}{2}}}{a}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}\left(aX^2+bX+c, 2aX+b\right) = -\frac{1}{a}\begin{vmatrix} c & b & 0\\ b & 2a & b\\ a & 0 & 2a\end{vmatrix} = -\frac{1}{a}\left(c\begin{vmatrix}2a & b\\ 0 & 2a\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & b\\ a & 2a\end{vmatrix}\right) = b^2-4ac$$

**16.** $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, $P$ et $P'$ sont scindés, donc $P$ et $P'$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune, donc si et seulement si toutes les racines de $P$ sont simples.
Donc, $P$ est scindé à racines simples si et seulement si $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P')\neq 0$ si et seulement si $\Delta(P)\neq 0$.

Partie IV

**17.** **a)** Pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, notons $HR(d)$ la propriété à montrer.

**Initialisation.** Un polynôme à une indéterminée admettant une infinité de racines est nul.

**Hérédité.** On fixe un entier $d\geqslant 2$. On suppose $HR(d-1)$ vraie.

Soit $P:(x_1,\dots,x_d)\mapsto \displaystyle\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in S} a_{(k_1,\dots,k_d)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}$ une fonction polynômiale s'annulant sur un produit $I_1\times I_2\times\cdots\times I_d$ de parties infinies de $\mathbb{C}$.

Quitte à ajouter des coefficients nuls, on peut supposer qu'il existe $r\in\mathbb{N}$ vérifiant $S=[\![0,r]\!]^d$.

On fixe $(u_1,u_2,\dots,u_{d-1})\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_{d-1}$.

Alors, pour tout $x\in I_d$

$$0 = P(u_1,\dots,u_{d-1},x) = \sum_{k=0}^{r}\underbrace{\left(\sum_{(k_1,\dots,k_{d-1})\in[\![0,r]\!]^{d-1}} a_{(k_1,\dots,k_{d-1},k)}u_1^{k_1}\cdots u_{d-1}^{k_{d-1}}\right)}_{=:P_k(u_1,\dots,u_{d-1})}x^k$$

Ainsi, comme le polynôme à une indéterminée $x\mapsto P(u_1,\dots,u_{d-1},x)$ admet une infinité de racines, ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k\in[\![0,r]\!]$,

$$\forall (u_1,u_2,\dots,u_{d-1})\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_{d-1}, P_k(u_1,\dots,u_{d-1})=0$$

donc d'après $HR(d-1)$, tous les coefficients de $P_k$ sont nuls.

Ainsi, tous les coefficients de $P$ sont nuls.

**b)** $Z_P$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue (car polynômiale) $P$.

Supposons que $\mathring{Z}_P\neq\varnothing$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut choisir la norme infinie sur $\mathbb{C}^d$. Il existe donc $\eta>0$ et $(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{C}^d$ tel que

$$D(a_1,\eta)\times D(a_2,\eta)\times\cdots\times D(a_d,\eta)\subset Z_P$$

où $D(x,r)$ désigne le disque fermé de centre $x\in\mathbb{C}$ et de rayon $r\in\mathbb{R}_+$

Ainsi, $P$ s'annule sur un produit d'ensembles infinis et $P$ est la fonction polynômiale nulle. Absurde.

Donc, $Z_P$ est un fermé d'intérieur vide. Son complémentaire est donc un ouvert dense.

**18.** De manière analogue, on définit les fonctions polynômiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
On fixe une fonction polynômiale $P:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. Si $P$ s'annule sur un produit $I_1\times I_2\times\cdots I_d$ de parties infinies de $\mathbb{R}$, alors $P$ est nul, *i.e.* tous ses coefficients sont nuls. Il suffit de reprendre la démonstration de 17.(a) en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
La fonction $P:M\mapsto\Delta\left(\chi_{M\overline{M}}\right)$ est polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de $M$ (on utilise l'identification naturelle entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{2n^2}$), à valeurs réelles (car $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{M\overline{M}}\in$

$\mathbb{R}[X]$) et n'est pas nulle, puisque si l'on pose $A := \mathrm{Diag}\,(1, 2, \dots, n)$, $\Delta\left(\chi_{A\overline{A}}\right) = \Delta\left(\prod_{k=1}^{n}(X - k^2)\right) \neq 0$, puisque $\prod_{k=1}^{n}(X - k^2)$ est scindé à racines simples.

$\Omega$ est le complémentaire de

$$Z_P := \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \Delta(\chi_{C\overline{C}}) = 0\}$$

qui est un fermé comme image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue $P$.

Si l'on suppose que $Z_P$ est d'intérieur non vide, $Z_P$ contient un produit d'intervalles non réduits à un point (en utilisant à nouveau l'identification précédente) donc infinis. Ainsi, $P$ a tous ces coefficients nuls. Ce qui est absurde, puisque $P$ n'est pas la fonction nulle.

Ainsi, $\Omega$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**19.** Soient $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\Omega$ qui converge vers $C$ (il en existe par densité). D'après la question 9., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(I_n + C_k\overline{C_k}\right) \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $M \mapsto \det\left(I_n + M\overline{M}\right)$ est continue (car par exemple, polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de la matrice). Ainsi, comme $\mathbb{R}_+$ est fermé, par passage à la limite, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$.

**20.** **a)** Soient $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat est immédiat si $\lambda = 0$ puisque dans ce cas, $\det\left(\lambda I_n + C\overline{C}\right) = \det\left(C\overline{C}\right) = |\det(C)|^2 \geqslant 0$.

Supposons maintenant que $\lambda > 0$. Alors, d'après la question 19,

$$\det\left(\lambda I_n + C\overline{C}\right) = \lambda^n \det\left(I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)}\right) \geqslant 0$$

**b)** $A$ étant à coefficients réels, $\overline{A} = A$, donc $\chi_M = \chi_{A\overline{A}}$. D'après la question précédente,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-,\ (-1)^n\chi_M(\lambda) \geqslant 0$$

Soient $\lambda_0$ une valeur propre réelle strictement négative de $M$ et $m \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

D'après ce qui précède, $\chi_M$ s'annule en $\lambda_0$ sans changer de signe (car $\lambda_0 < 0$). Comme il existe $\alpha \neq 0$ vérifiant

$$\chi_M(\lambda) \underset{\lambda\to\lambda_0}{\sim} \alpha\,(\lambda - \lambda_0)^m$$

on en déduit que $m$ est pair.

**c)** Supposons qu'il existe $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = \exp(U)$.

Si l'on pose $A := \exp\left(\frac{1}{2}U\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $M = A^2$. D'après la question précédente, les valeurs propres strictement négatives sont de multiplicité paire. 0 n'est pas une valeur propre de $M$ puisque $M$ est inversible comme exponentielle d'une matrice. Donc, les valeurs propres réelles négatives de $M$ sont de multiplicité paire.

## Partie V

**21.** On note $d$ le degré de $D$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors,

$$\begin{cases} P = \mathrm{quo}_D(P)D + \mathrm{rem}_D(P) \\ \deg(\mathrm{rem}_D(P)) < d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q = \mathrm{quo}_D(Q)D + \mathrm{rem}_D(Q) \\ \deg(\mathrm{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \lambda P + \mu Q = (\lambda\mathrm{quo}_D(P) + \mu\mathrm{quo}_D(Q))D + (\lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)) \\ \deg(\lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Par unicité, on en déduit que

$$\mathrm{quo}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda\mathrm{quo}_D(P) + \mu\mathrm{quo}_D(Q) \quad \text{et} \quad \mathrm{rem}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)$$

Ainsi, $\text{quo}_D$ et $\text{rem}_D$ sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.
Par ailleurs,

$$\text{rem}_D(P) = 0 \times D + \text{rem}_D(P) \quad \text{et} \quad \deg(\text{rem}_D(P)) < d$$

Donc, par unicité,

$$\text{quo}_D(\text{rem}_D(P)) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rem}_D(\text{rem}_D(P)) = \text{rem}_D(P)$$

Donc, $\text{rem}_D \circ \text{rem}_D = \text{rem}_D$. Ainsi, $\text{rem}_D$ est un projecteur.
C'est le projecteur sur $\text{Im}(\text{rem}_D) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{rem}_D) = D\mathbb{K}[X]$.

**22.** $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quotient. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\overline{P} = \overline{\text{rem}_Q(P)} \in \text{Vect}(\mathscr{B}_0)$, puisque $\deg(\text{rem}_Q(P)) \leqslant \deg(Q) - 1 = r - 1$. Ainsi, $\mathscr{B}_0$ est une famille génératrice.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \in \mathbb{K}^r$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \overline{X}^k = \overline{0}$ *i.e.* $\overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k} = \overline{0}$. Ainsi, $Q$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k$.

Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k \neq 0$, alors $r = \deg(Q) \leqslant \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k\right) \leqslant r - 1$. Absurde. Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k = 0$ et les coefficients sont nuls. Ainsi, $\mathscr{B}_0$ est libre.
Donc, $\mathscr{B}_0$ est une base de $E$.

**23.** **a)** $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $P \wedge Q = 1$.
Alors, $\overline{P}$ est inversible d'après le théorème de Bézout.
Ainsi, en posant $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overline{U} & \longmapsto & \overline{P}^{-1}\overline{U} \end{array}$, $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$. Donc, $f$ est un automorphisme de $E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f$ soit un automorphisme de $E$.
En particulier, $f$ est surjective. Donc, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\overline{PU} = \overline{1}$. Ainsi, il existe $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PU = 1 + QV$.
Donc, $P \wedge Q = 1$ d'après le théorème de Bézout.

**b)** Pour tout $\in [\![0, r-1]\!]$, $f\left(\overline{X}^j\right) = \overline{X^j P} = \overline{QU_j + R_j} = \overline{R_j}$. Donc, $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f) = \tilde{R}$.

**24.** **a)** Soit $S \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.
Alors, comme $\deg(\text{rem}_Q(S)) \leqslant r - 1 \leqslant q + r - 1$ et $\deg(S) \leqslant q + r - 1$,

$$\deg\left(\text{quo}_Q(S)\right) + r = \deg\left(\text{quo}_Q(S)Q\right) = \deg\left(S - \text{rem}_Q(S)\right) \leqslant \max\left(\deg(S), \deg(\text{rem}_Q(S))\right) \leqslant q + r - 1$$

Ainsi, $\deg(\text{quo}_Q(S)) \leqslant q - 1$. D'où,

$$\deg\left(P\text{rem}_Q(S) + Q\text{quo}_Q(S)\right) \leqslant \max\left(q + \deg\left(\text{rem}_Q(S)\right), r + \deg\left(\text{quo}_Q(S)\right)\right) \leqslant q + r - 1$$

Ainsi, $\tilde{f}$ est bien définie.

**b)** Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$. Comme $\deg(U) < \deg(Q)$, $U = \text{rem}_Q(U + QV)$ et $V = \text{quo}_Q(U + QV)$. Ainsi,

$$\tilde{f}\,(U + QV) = PU + QV$$

**c)** $\mathscr{B}$ est une famille de $q + r = \dim\left(\mathbb{K}_{q+r-1}[X]\right)$ polynômes de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ étagée par les degrés. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

**d)** Pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, $\tilde{f}\left(X^j\right) = X^j P = QU_j + R_j$ et tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, $\tilde{f}\left(X^j Q\right) = X^j Q$.
Donc, en notant $\tilde{U}$ la matrice de $(U_0, U_1, \ldots, U_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}\left(\tilde{f}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ \tilde{U} & I_q \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\det(\tilde{f}) = \det(\tilde{R})\det(I_q) = \det(f)$$

**25.** **a)** Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\xi\,(U + X^r V) = PU + QV \quad \text{et} \quad \psi(U + X^r V) = U + QV$$

**b)** Pour tout $j \in [\![0, q+r-1]\!]$,

$$\xi\left(X^j\right) = \begin{cases} X^j P & \text{si } j \leqslant r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geqslant r \end{cases} \qquad \text{et} \quad \psi\left(X^j\right) = \begin{cases} X^j & \text{si } j \leqslant r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geqslant r \end{cases}$$

Donc,

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\xi) = \text{Syl}(P, Q)$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{r} & \overbrace{\hphantom{b_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{q} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & & \ddots & b_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_r \end{bmatrix} \end{array}$$

La seconde matrice est triangulaire supérieure.

**c)** $\det(\psi) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)\right) = b_r^q \neq 0$ (car $\deg(Q) = r$), donc $\psi$ est un automorphisme.

**d)** Avec les notations précédentes, on a

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV = \xi\left(U + X^r V\right)$$

donc,

$$\tilde{f}\left(\psi\left(U + X^r V\right)\right) = \xi\left(U + X^r V\right)$$

Ainsi, comme $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto & U + X^r V \end{array}$ est surjective, on en déduit que

$$\tilde{f} \circ \psi = \xi$$

donc

$$\tilde{f} = \xi \circ \psi^{-1}$$

**26.**

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \det(\xi) = \det(\tilde{f} \circ \psi) = \det(\tilde{f}) \det(\psi) = \det(f) b_r^q$$

## Partie VI

**27.** **a)** Posons $P := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$. Alors, $P$ est inversible et $P^{-1} = P$. De plus,

$$P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

**b)** Posons $Q := \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$. Alors, $Q$ est inversible et $Q^{-1} = Q$. De plus,

$$Q \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

**28.** Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \overline{B} & \lambda I_n - \overline{A} \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \overline{A} & \overline{B} \\ -B & \lambda I_n - A \end{bmatrix}\right) && \text{d'après la question 27.(a)} \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \overline{A} & -\overline{B} \\ B & \lambda I_n - A \end{bmatrix}\right) && \text{d'après la question 27.(b)} \\
&= \overline{\det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \overline{B} & \lambda I_n - \overline{A} \end{bmatrix}\right)} && \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \\
&= \overline{\chi_M(\lambda)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_M$ et $\overline{\chi_M}$ coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{R}$. Donc, $\chi_M = \overline{\chi_M}$ et $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$.

**29.** **a)** Soient $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\theta\left(\lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right) = \theta\begin{pmatrix} \lambda X_1 + \mu X_2 \\ \lambda Y_1 + \mu Y_2 \end{pmatrix} \underset{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}{=} \begin{pmatrix} -\lambda\overline{Y_1} - \mu\overline{Y_2} \\ \lambda\overline{X_1} + \mu\overline{X_2} \end{pmatrix} = \lambda\,\theta\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu\,\theta\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Alors, pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,

$$u\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ -\overline{B}X + \overline{A}Y \end{pmatrix}$$

donc,

$$u\left(\theta\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = u\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\overline{Y} + B\overline{X} \\ \overline{B}\,\overline{Y} + \overline{A}\,\overline{X} \end{pmatrix}$$

et

$$\theta\left(u\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \theta\begin{pmatrix} AX + BY \\ -\overline{B}X + \overline{A}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\overline{-\overline{B}X + \overline{A}Y}\right) \\ \overline{AX + BY} \end{pmatrix} = u\left(\theta\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

Donc, $u$ et $\theta$ commutent.

**b)**

$$\theta \circ \theta = -\operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}$$

**c)** Posons $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \\ (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \end{pmatrix}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant

$$\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X - \mu\overline{Y} \\ \lambda Y + \mu\overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $(x_{k_0}, y_{k_0}) \neq (0, 0)$, puisque $v$ non nul.
On déduit de l'égalité précédente que

$$\begin{cases} \lambda x_{k_0} - \mu\overline{y_{k_0}} = 0 \\ \lambda y_{k_0} + \mu\overline{x_{k_0}} = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène en $(\lambda, \mu)$ de déterminant $|x_{k_0}|^2 + |y_{k_0}|^2 > 0$.
C'est donc un système de Cramer et $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.
Ainsi, $(v, \theta(v))$ est $\mathbb{C}$-libre.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors, comme $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,\ \theta(\lambda w) = \overline{\lambda}\theta(w)$,

$$\theta(\alpha v + \beta\theta(v)) = \overline{\alpha}\theta(v) + \overline{\beta}(\theta \circ \theta)(v) = \overline{\alpha}\theta(v) - \overline{\beta}v \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$$

**d)** Posons $F := E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.
$F$ est un sev de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par $\theta$. Comme $v \notin E$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) \not\subset E$. Ainsi, $\dim(F) \leqslant 1$.
Supposons que $\dim(F) = 1$ et fixons $w \in F$ non nul. D'après la question 29.(c), $(w, \theta(w))$ est libre et $\theta(w) \in F$, puisque $F$ est stable par $\theta$. Absurde.
Donc $\dim(F) = 0$ et $E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

**30. a)** Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Comme $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\lambda}$ est une racine de $\chi_M$ de même multiplicité que $\lambda$ et $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $M$. Notons $m$ la multiplicité commune de $\lambda$ et $\overline{\lambda}$.
Notons $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $M$. D'après la question 29.(a), $\theta$ et $u$ commutent. Soit $P := \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors,

$$\theta \circ P(u) = \theta \circ \left( \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \right) = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, \theta \circ u^k = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, u^k \circ \theta = \left( \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, u^k \right) \circ \theta = \overline{P}(u) \circ \theta$$

En particulier,

$$\theta \circ (u - \lambda \,\mathrm{Id})^m = \left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m \circ \theta$$

Donc, pour tout $v \in E'_\lambda = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{Id})^m\right)$,

$$\left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m (\theta(v)) = \theta\left((u - \lambda\,\mathrm{Id})^m (v)\right) = \theta(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \theta(v) \in \mathrm{Ker}\left(\left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m\right) = E'_{\overline{\lambda}}$$

Ainsi, $\theta\left(E'_\lambda\right) \subset E'_{\overline{\lambda}}$.
Par ailleurs, $\dim_{\mathbb{C}}\left(E'_\lambda\right) = \dim_{\mathbb{C}}(E'_{\overline{\lambda}}) = m$, donc $\dim_{\mathbb{R}}\left(E'_\lambda\right) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\overline{\lambda}}) = 2m$. Or $\theta$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Donc, $\dim_{\mathbb{R}}(\theta\left(E'_\lambda\right)) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\overline{\lambda}})$. Ainsi, $\theta\left(E'_\lambda\right) = E'_{\overline{\lambda}}$.

**b)** Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente, $E'_\lambda$ est stable par $\theta$. Supposons que $\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$ soit impaire.
Soit $v_1 \in E'_\lambda$ non nul. Alors $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, \theta(v_1))$ est un plan stable par $\theta$ inclus dans $E'_\lambda$ (car $E'_\lambda$ est stable par $\theta$) d'après la question 29.(c).
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tels que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$, $1 \leqslant i \leqslant k$ soient des plans stables par $\theta$ vérifiant

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}}\left( \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) = 2k$ et $\dim_{\mathbb{C}}\left(E'_\lambda\right)$ est impair, l'inclusion précédente est stricte.

On fixe alors $w_{k+1} \in E'_\lambda$ tel que $w_{k+1} \notin \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$.

Comme $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$ est stable par $\theta$, d'après la question 29.(b), $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1}))$ est un plan stable par $\theta$ inclus dans $E'_\lambda$ (car $E'_\lambda$ est stable par $\theta$) et

$$\left( \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1})) = \{0\}$$

Ainsi,

$$\bigoplus_{i=1}^{k+1} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

On aboutit à une contradiction dès que $k > \dfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$. Ainsi, $E'_\lambda$ est de dimension paire.

**31.** Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. On a montré que $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, si $\lambda$ est une racine complexe de multiplicité $m$, alors $\overline{\lambda}$ est également une racine de multiplicité $m$.
On factorise $\chi_M$ dans $\mathbb{C}[X]$

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}(X-\overline{\lambda_i})^{m_i}\prod_{j=1}^{s}(X-\mu_j)^{n_j}$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ sont les racines non réelles à partie imaginaire strictement positive et où $\mu_1,\ldots,\mu_s$ sont les racines réelles.
D'après la question 30. pour tout $j \in [\![1,s]\!]$, $n_j = \dim_{\mathbb{C}}\left(E'_{\mu_j}\right)$ est pair.
Ainsi,

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{r}|\lambda_i|^{2m_i}\prod_{j=1}^{s}\mu_j^{n_j} \in \mathbb{R}_+$$

## 3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
`http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_interne/22/4/s2018_agreg_interne_math_2_887224.pdf`

### 3.2.1 Présentation du sujet

Dans ce problème, l'objectif est d'étudier la ligne d'équidistance de deux fermés de $\mathbf{R}^2$ séparés par une droite.
Dans la partie **I-A**, on revoit quelques propriétés classiques sur la notion de distance à une partie.
Dans la partie **I-B**, on étudie quelques exemples dans $M_n(\mathbf{R})$ muni de la norme liée au rayon spectral.
Dans la partie **II** on s'intéresse à un exemple de points d'une courbe à égale distance d'une droite.
Dans la partie **III**, on introduit la notion de courbe médiatrice de deux fermés de $\mathbf{R}^2$ séparés par une droite et on étudie sa continuité.
Dans la partie **IV**, on mène une étude plus fine et on montre l'existence d'une asymptote dans le cas où les fermés sont compacts.
Signalons que l'on peut établir la dérivabilité à gauche et à droite en chaque point, et même la dérivabilité si les fermés sont en plus convexes.

Les ingrédients pour ce problème relevaient de la topologie, de la compacité, de l'algèbre bilinéaire, des suites et séries de fonctions et de l'informatique.

### 3.2.2 Remarques générales

La clarté, la rigueur, la précision et la concision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation des copies. De nombreux candidats perdent des points précieux dans les questions les plus accessibles du problème par des défauts de rédaction.

Les arguments trop souvent invoqués tels que : « c'est évident », « forcément », « on voit facilement que » ne constituent pas une preuve sauf à citer en quelques mots simples ce qui est évident, facile ou forcé.

L'utilisation des hypothèses données dans l'énoncé doit être signalée au moment opportun et non en vrac en début de réponse, afin de bien faire ressortir l'articulation du raisonnement. Il ne faut pas hésiter à illustrer ses idées à l'aide de dessins clairs et convaincants comme l'avait suggéré l'énoncé.

Il faut que les futurs candidats soient persuadés qu'ils ne perdront pas de temps ni de points, bien au contraire, en proposant une rédaction complète et rigoureuse des questions qu'ils auront résolues (tout en sachant rester concis...). Le jury a particulièrement apprécié certaines copies bien rédigées montrant un niveau mathématique solide, une fluidité et une pertinence dans les arguments de rédaction.

Par ailleurs, ce problème était volontairement de difficulté progressive et découpé en parties largement indépendantes pour permettre aux candidats de mettre en valeur leurs différentes compétences sur des thèmes variés. Si le grappillage est déconseillé, il est tout à fait compréhensible qu'un candidat se sente peu à l'aise avec les notions développées dans une partie donnée ou soit bloqué après une recherche sérieuse, lorsque la difficulté devient trop élevée. Le candidat a alors tout intérêt, soit