3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_interne/56/1/s2017_agreg_interne_math_2_705561.pdf

3.2.1 Présentation du sujet

La deuxième épreuve écrite porte sur la définition et l'étude d'une fonction elliptique du type de Weierstrass.

La fonction elliptique de Weierstrass, notée habituellement $\wp_{\omega_1,\omega_2}$, est un objet mathématique bien connu ($\wp$ est prononcé *pé*). C'est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, admettant deux périodes ω_1 et ω_2 et possédant des pôles, tous d'ordre 2, localisés sur $\omega_1\mathbf{Z} \times \omega_2\mathbf{Z}$.

Pour éviter le recours à la théorie des fonctions de la variable complexe, et afin d'obtenir des représentations en séries de Fourier selon les deux périodes, c'est en fait la fonction $\wp(z) = \alpha\wp_{2\pi,2i\pi}(z+\pi+i\pi)$ qui est finalement étudiée dans cette épreuve (α est une constante sans utilité ici).

La partie I a pour objectif de démontrer la formule de Poisson et de l'appliquer à un cas particulier utile par la suite.
La sommabilité n'étant pas au programme de l'agrégation interne, la partie II permet de mettre en place une version du théorème de Fubini sur $\mathbf{Z}^2$, suffisante pour les applications à venir.
Dans la partie III, on définit la fonction φ (qui sera plus tard $\wp$ à une constante additive près). C'est une fonction de la variable réelle, mais qui se prolonge naturellement sur l'axe imaginaire pur en une fonction $2i\pi$ périodique. On établit que φ est 2π-périodique à la question 13, ce qui permet d'appliquer la formule de Poisson à la question 15.
Une dernière transformation de la fonction φ permet d'obtenir une égalité étonnamment symétrique à la question 22, c'est l'objet de la partie IV.
L'introduction de $\wp$ repose essentiellement sur l'égalité de la question 22 qui permet de définir une fonction à la fois 2π et $2i\pi$-périodique. L'étude de $\wp$ et de sa représentation sous forme de série double où les pôles sont mis en évidence, à la manière de la définition de Weiertrass, fait l'objet de la partie V.

Bien qu'assez technique au premier abord, le sujet n'est pas de type calculatoire. Il permet de balayer les théorèmes d'analyse concernant la régularité des fonctions définies par une intégrale à paramètre ou par une série de fonctions, et les inversions entre divers signes de sommation et/ou d'intégration.
À noter que les débuts de parties, généralement plus abordables, permettent de poursuivre le sujet même lorsqu'il y a blocage sur une question d'une partie antérieure. De nombreux candidats ont su saisir cette opportunité.
Venons-en à quelques conseils et remarques, complétant ou confortant les rapports de jury précédents qu'il est utile de lire également.

3.2.2 Remarques générales

Il est à noter que beaucoup de candidats manquent d'efficacité dans le sens où les questions abordées sont trop peu nombreuses même si elles sont assez souvent bien rédigées et que peu de bêtises sont dites (ce qui est la preuve d'un travail de préparation sérieux).
Une bonne connaissance de quelques énoncés généraux et leur utilisation parfois simple sur des questions clés du problème pouvaient suffire à obtenir une note raisonnable.

Voici quelques exemples de théorèmes et définitions indispensables à la réussite de cette épreuve :

- définition d'une fonction intégrable, utilisation de la domination ;
- comparaison à une série ou une intégrale de Riemann ;
- définition des convergences uniforme et normale d'une série de fonctions ;
- définition des coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique ;
- théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier ;
- théorème de continuité ou de classe C^1 pour les intégrales à paramètre ;
- théorème de continuité ou de classe C^1 pour une série de fonctions ;
- théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.

3.2.3 Commentaires par question

Il faut commencer par souligner que de bonnes, voire de très bonnes copies, ont su éviter les écueils listés ci-dessous. Les remarques qui suivent ont pour objectif de pointer quelques erreurs récurrentes trouvées dans certaines compositions.

PARTIE I : ANALYSE DE FOURIER

Q1. – Il est important, surtout au début de la copie, de rédiger les réponses de façon détaillée et concise. Par exemple pour cette première question :

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, donc intégrable sur tout segment. Les dominations en $\pm\infty$ par $O(x^{-2})$ montrent que f est intégrable sur $\mathbf{R}_-$, $\mathbf{R}_+$ puis $\mathbf{R}$, par comparaison avec une intégrale de Riemann.
De même, à $y \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $h_y : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-ixy}$ est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout réel x, $|h_y(x)| = |f(x)|$ qui est intégrable ; h_y l'est aussi et $\hat{f}$ est définie sur $\mathbf{R}$.

Voici quelques écueils à éviter :

- affirmer que f est continue donc intégrable (sur $\mathbf{R}$) ;
- affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc f est intégrable ;
- écrire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ sans se poser la question de l'existence de cet objet ou bien énoncer « $\dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ » ;
- un candidat à l'agrégation doit maîtriser les dominations à l'aide d'intégrales de Riemann ;
- effectuer des calculs et/ou utiliser des inégalités avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ alors qu'il s'agit de justifier l'existence de cet objet ;
- affirmer qu'un produit de fonctions intégrables est intégrable ;
- écrire $|f(x)\mathrm{e}^{-ixy}| < |f(x)|$ (inégalité stricte !) ;
- ne pas faire la distinction entre les notations de Landau o et O ;
- majorer $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixy}\mathrm{d}x\right|$ pour en déduire (faussement, de plus) l'existence de cette intégrale.

Q2.a. – Ici aussi, une rédaction longue est inutile. Pour x fixé, on utilise simplement la convergence de la série de Riemann de référence. À noter un mauvais usage des inégalités : la seule indication $f(x+2n\pi) \leqslant a/n^2$ ne suffit pas. De même on trouve trop souvent la confusion entre convergence absolue de $\sum u_n$ et convergence de la suite $(|\sum_{k=1}^{n} u_k|)_{n\in\mathbf{N}}$.
Q2.b. – Un nombre non négligeable de copies font preuve de rigueur en utilisant des sommes partielles, ce qui était attendu. Cependant, le décalage d'indices et l'argument de convergence font souvent défaut.
Q2.c. – L'erreur classique concerne la confusion entre convergence absolue et convergence normale (pour laquelle un rappel de la définition permet de lever toute ambiguïté). De même un argument du type $u_n(x) = O(1/n^2)$ est nettement insuffisant.
Attention à l'affirmation « les compacts de $\mathbf{R}$ en sont les segments » (voire les intervalles).
Q2.d. – Il faut citer les théorèmes avec un jeu d'hypothèses raisonnables. La seule référence à la convergence normale pour justifier la convergence de $\sum u_k$ et $\sum u'_k$ laisse penser que le candidat s'appuie sur l'énoncé et non sur ses connaissances.
Q3. – Assez peu traitée, cette question nécessite la connaissance d'un théorème de convergence sur les séries de Fourier, typiquement Dirichlet (dont il faut rappeler les hypothèses), et un calcul justifié des coefficients de Fourier. Les candidats qui s'y sont aventurés en sont souvent restés au stade du calcul formel.
Q4.a. – On relève beaucoup d'erreurs dans la définition des coefficients de Fourier c_n. Nombreux sont les candidats qui utilisent l'égalité $h_t(x) = \mathrm{e}^{tx}$ sur $[0, 2\pi]$ dans le calcul de c_n, avec l'intégrale portant sur $[0, 2\pi]$. Il faut prendre un minimum de recul avant d'appliquer une formule.
Un nombre non négligeable de candidats affirment que la fonction h_t, prolongée par 2π-périodicité, est continue en $-\pi$, confondant la continuité de la restriction de h_t à $[-\pi, \pi[$ et la continuité de la fonction h_t définie sur $\mathbf{R}$.
Q4.b. et c. – Les hypothèses du théorème de Dirichlet sont souvent omises ou mal vérifiées. De même pour la conclusion qui semble ne concerner que les points de continuité.
Q5. – À noter : la convergence d'une série de Fourier $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n \mathrm{e}^{inx}$ n'implique pas la convergence de chacune des séries $\sum_{n\leqslant 0} c_n \mathrm{e}^{inx}$ et $\sum_{n\geqslant 0} c_n \mathrm{e}^{inx}$.

Partie II : Sommation d'une suite double

Q6.a. – Un argument possible consiste à établir que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Un autre raisonnement est de remarquer que les deux séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k<0} u_{-k}$ convergent absolument, donc convergent.
La convergence absolue est trop souvent confondue avec la convergence de la suite $(|S_n|)_{n\in\mathbf{N}}$. La rédaction commence souvent par « $|S_n| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |u_k| \leqslant \dots$ » et se termine par « la série converge absolument ». C'est problématique pour la correction : que veut montrer le candidat ? Que (S_n) est bornée ? Que la série converge absolument ?
Q6.b. – Établir que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy est ici l'argument le plus pertinent. Un dessin, fait par certains candidats, représentant les couples d'indices de sommation peut aider à la compréhension.
Q7. et Q8. – Beaucoup trop d'imprécisions dans les questions 7 et 8, les plus mal traitées du problème.

Partie III : Une fonction périodique sur $\mathbf{R}$

Q.10 – De nombreux candidats font appel au critère spécial des séries alternées en oubliant de mentionner ou de vérifier la décroissance de la valeur absolue du terme général. Dans cette question, la convergence absolue est l'outil à privilégier.
Q.11 – De même, pour montrer que φ est de classe C^∞ sur $]-\pi,\pi[$, il ne suffit pas de montrer la convergence de la série des dérivées de tout ordre k.
Q.12 – Une majorité de candidats se contentent de justifier la convergence de la somme géométrique par $\mathrm{e}^{-2n\pi} < 1$, en oubliant la valeur absolue ou la positivité. L'interversion des deux sommes est souvent mécanique, peu de candidats signalent qu'il faudrait justifier (et encore moins s'aventurent dans cette justification !).
Q.14 – C'est bien le terme de droite de la question 13 qui permet le prolongement. En l'espèce, évoquer $\varphi(x+2\pi)$ n'a pas sens à ce stade. Mieux vaut appeler $\Phi(x)$ le terme de droite, puis montrer que $\Phi(x+2\pi) = \Phi(x)$.
Q.15 – Les candidats qui abordent cette question oublient souvent de vérifier que la fonction ψ qu'ils choisissent vérifie bien $\psi(x) = O(1/x^2)$ et $\psi'(x) = O(1/x^2)$ de façon à pouvoir appliquer les résultats de la partie I.

Partie IV : Développement en série de Fourier

Q.16 – Il n'est pas raisonnable de commencer par majorer la valeur absolue de l'intégrale dont on cherche à prouver l'existence…
Q.17 – L'énoncé donné par certains candidats du théorème de continuité des intégrales à paramètre est souvent faux ou très imprécis.

Partie V : Développement de Weierstrass

Q.23 – La plupart des candidats pensent que t est réel, ce qui induit une erreur dans le calcul du module du dénominateur.
Q24.a. – Certains candidats font apparaître des séries divergentes telles que $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{t-in}$ qu'ils manipulent sans précaution.
Q24.b. – La question est plus délicate qu'il n'y paraît puisque la variable de dérivation est complexe. Cependant, rien n'empêche le candidat de dériver par rapport à la partie réelle de la variable t, ce qui mène au résultat.

La fin du sujet, plus technique, n'a été que très peu abordée.