3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_interne/56/0/s2017_agreg_interne_math_1_705560.pdf

3.1.1 Présentation du sujet

Le problème porte sur le thème de la décomposition polaire d'une matrice inversible à coefficients réels ou complexes. Les préliminaires regroupent des résultats classiques et élémentaires, éventuellement utiles pour la suite. La partie I étudie les classes de similitudes des matrices involutives ($M^2 = I_n$). La partie II démontre le résultat classique suivant : la suite des puissances d'une matrice converge vers la matrice nulle si et seulement si son rayon spectral est strictement inférieur à 1. La partie III définit le *signe* d'un nombre complexe non imaginaire pur α comme le signe de sa partie réelle et on y démontre que la suite récurrente $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ de premier terme α converge vers ce signe. La partie IV étend ce résultat aux matrices n'ayant aucune valeur propre imaginaire pur. La partie V définit une racine carrée particulière d'une matrice n'ayant aucune valeur propre dans $\mathbf{R}^-$. Les parties VI et VII permettent de retrouver la décomposition polaire d'une matrice inversible M à coefficients respectivement réels et complexes, c'est-à-dire la décomposition comme produit d'une matrice orthogonale P (respectivement unitaire) et d'une matrice symétrique (respectivement hermitienne) définie positive S, et ceci de façon unique. On obtient la matrice orthogonale P qui convient comme solution d'un problème de minimisation, cette matrice P étant la matrice du groupe orthogonal (respectivement unitaire) la plus proche de la matrice M pour la distance euclidienne. La partie VI utilise les matrices de rotations planes et les matrices de réflexions pour justifier le résultat, alors que la partie VII utilise une argumentation basée sur du calcul différentiel.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet était long mais de difficulté progressive; il abordait plusieurs attendus du programme. Beaucoup de questions étaient abordables avec des connaissances relevant du niveau L1 ou L2. Néanmoins, très peu de copies dépassent de façon significative le début de la partie IV. Par maladresse dans le maniement des nombres complexes et méconnaissance de la théorie de la réduction des matrices et de l'algèbre bilinéaire, trop de temps est perdu dans des justifications laborieuses ou des calculs longs et inutiles. Des questions élémentaires sur les nombres complexes, le binôme de Newton ou encore la notion de bijection se sont révélées très discriminantes.

3.1.3 Commentaires par question

Préliminaires

1. Le plus simple est probablement d'invoquer qu'un nombre complexe a deux racines carrées opposées l'une de l'autre. Lorsque ce nombre n'est pas un nombre réel négatif, ses racines ne sont pas des imaginaires purs, donc l'une d'entre elles, et seulement une d'entre elles, est de partie réelle strictement positive. La forme polaire ($z = \rho e^{it}$) d'un nombre complexe permet aussi de résoudre la question facilement, à condition d'énoncer une caractérisation précise de l'argument : est-il dans un intervalle fixé ou est-il défini modulo 2π ? Le plus simple ici, compte tenu de l'hypothèse, était de le prendre dans $[-\pi, \pi[$. Les calculs faits directement sur l'écriture

algébrique $z = a + ib$ sont plus fastidieux et nécessitent plus de précautions ; le raisonnement est plutôt par analyse-synthèse, la partie analyse justifiant l'unicité si existence, alors que seule la synthèse justifie l'existence.

2. **(a)** On pouvait mener un raisonnement algébrique (cette fois-ci plus simple en utilisant l'écriture algébrique) ou géométrique en remarquant que la médiatrice des points d'affixes respectives -1 et 1 est la droite $i\mathbf{R}$.

(b) S'il est facile de justifier que la fonction g réalise une bijection de $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$, il faut aussi justifier l'égalité ensembliste $g(\mathcal{O}^+) = \mathcal{D}$, ce qui a été souvent oublié.

3. **(a)** Beaucoup de candidats peinent à justifier la positivité de la matrice ${}^tMM$.
Le plus simple est d'utiliser la forme quadratique sous-jacente, soit pour tout vecteur X, $||MX||^2 = {}^tX\,{}^tMMX$. Il n'est en tout cas pas raisonnable d'essayer d'obtenir la positivité des valeurs propres en utilisant uniquement le déterminant et la trace de la matrice, sauf dans les dimensions 1 et 2. Il n'est pas vrai non plus en toute généralité que les matrices M et ${}^tM$ ont les mêmes sous-espaces propres ni que les valeurs propres de ${}^tMM$ soient les carrés des valeurs propres de M (considérer par exemple le cas d'une matrice nilpotente).

(b) Beaucoup d'erreurs ont été commises sur le caractère euclidien d'une norme : les vérifications nécessaires se font sur le produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) et on en déduit celles de la norme associée ; il n'y a pas lieu de se noyer dans la justification de l'inégalité triangulaire.

4. Distinguer le produit hermitien $(M, N) \to < M, N >= \mathrm{Tr}(\,N^*M)$, forme sesquilinéaire définie positive, de la norme qu'il définit.

Partie I

Les correcteurs ont constaté de nombreuses confusions entre matrices diagonales et diagonalisables.

5. **(a)** On peut directement utiliser le lemme des noyaux en ayant remarqué que le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur et que les polynômes $X - 1$ et $X + 1$ sont premiers entre eux. Attention au fait que 1 et -1 ne sont pas toujours <u>les</u> valeurs propres de L, il est possible que $L = \pm I_n$, ce qui correspond aux cas où F ou G sont réduits à $\{0\}$.

(b) Question bien réussie, en utilisant le fait que les traces de deux matrices semblables sont égales.

6. **(a)** Question bien réussie, il s'agit simplement de la relation de similitude.

(b) S'il est toujours vrai que deux matrices semblables ont même trace, la réciproque est fausse en général. Ici, elle repose sur le fait que la trace d'une involution L détermine les dimensions des sous-espaces $F = \mathrm{Ker}\ (L - I_n)$ et $G = \mathrm{Ker}\ (L + I_n)$.

(c) La réduction d'une matrice involutive assure que sa trace est un entier compris entre $-n$ et n, d'où la finitude du nombre de classes d'équivalence. On en a exactement $(n + 1)$ (les valeurs possibles de la dimension du sous-espace $F = \mathrm{Ker}\ (L - I_n)$ sont $0, 1, ..., n$).

Partie II

7. **(a)** Il faut argumenter le caractère nilpotent de B mais aussi le fait que l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Les deux s'obtiennent grâce au théorème d'Hamilton-Cayley.

(b) On peut utiliser la formule du binôme en remarquant que les deux matrices commutent.

(c) Cette question a été très rarement correctement traitée. Il faut entre autres choses justifier qu'une suite de la forme $\left(\binom{\ell}{k}|\alpha|^{\ell}\right)_{(\ell\in\mathbf{N})}$ converge vers 0 lorsque ℓ tend vers $+\infty$. Il s'agit d'un argument de croissances comparées puisque $\left(|\alpha|^{\ell}\right)_{(\ell\in\mathbf{N})}$ est une suite géométrique qui converge vers 0, alors que la suite $\left(\binom{\ell}{k}\right)_{(\ell\in\mathbf{N})}$ converge vers $+\infty$, mais est une suite polynomiale.

8. Cette question a été très peu abordée. La décomposition en somme directe de sous-espaces caractéristiques permet de se ramener au cas où la matrice a une seule valeur propre.

Partie III

9. i convient.

10. L'étude d'une suite récurrente de ce type ne devrait pas poser de difficultés à un candidat à l'agrégation interne. Mais il faut faire attention à tout justifier et cela demande un peu d'organisation. On peut par symétrie se ramener au cas où $\alpha > 0$ et justifier qu'alors, au moins à partir du rang 1, la suite appartient à $[1, +\infty[$ et est décroissante, à l'aide du tableau de variation de la fonction. Il y a en fait quatre cas à distinguer selon que α est dans un intervalle $]-\infty, 1],]-1, 0[,]0, 1[, [1, +\infty[$. Attention à ne pas confondre la monotonie de la suite avec celle de la fonction.

11. **(a)** Cette question est dans l'ensemble correctement traitée.

(b) Le calcul algébrique est souvent fait mais la convergence ainsi que la détermination de la limite sont rarement abordées.

(c) Question de synthèse très rarement abordée.

Partie IV

Cette partie a montré que la diagonalisation et la trigonalisation sont souvent peu maîtrisées, avec des confusions surprenantes dans le vocabulaire et dans les critères utilisés (les matrices inversibles ne sont pas toutes diagonalisables, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice sont des polynômes annulateurs de cette matrice et ont pour racines ses valeurs propres, mais pas avec les mêmes multiplicités en toute généralité...).

12. **(a)** Question rarement bien traitée, faute de rédaction précise.

(b) Beaucoup de candidats oublient que la limite d'une suite de matrices inversibles ne l'est pas nécessairement. De fait, toute matrice à coefficients réels ou complexes est une limite de matrices inversibles.

(c) Question très peu abordée. Il faut rappeler que la trace est une application continue.

13. La question a est abordée mais peu de candidats se rendent compte qu'elle n'est pas aussi directe que la question 12. Il faut argumenter le fait que le spectre de la matrice A^{-1} est l'ensemble des inverses du spectre de A. On peut l'obtenir en trigonalisant A par exemple, ce qui fournit une trigonalisation simultanée pour A et A^{-1} et donc une matrice triangulaire semblable à $\frac{1}{2}(A + A^{-1})$, ce qui permet de conclure. Les questions (b), (c) et (d) n'ont quasiment pas été abordées, comme le reste de cette partie.

Parties V, VI, VII

Les questions de ces trois parties ont été très rarement, voire jamais, abordées. Certains candidats ont reconnu la question 21 (racine carrée d'une matrice symétrique ou hermitienne définie positive) et l'ont traitée indépendamment des résultats précédents. De même pour la question 27a. L'étude de la compacité du groupe orthogonal dans la question 22 (puis du groupe unitaire dans la partie VII), ne peut se faire sans une définition correcte du groupe orthogonal. Il faut donc insister sur le fait que les matrices orthogonales ne sont pas les matrices de déterminant ± 1. On pourrait d'ailleurs vérifier facilement que le groupe spécial linéaire, groupe des matrices de déterminant 1, n'est pas compact en dimension supérieure ou égale à 2 ; ce qui montre aussi, si besoin est, que l'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas nécessairement compacte.

Il reste à signaler les deux résultats classiques suivants qui étaient utiles pour traiter la fin du problème :

- l'inverse d'une matrice inversible A est un polynôme en A (par exemple, en utilisant le théorème de Hamilton-Cayley) ;
- la limite d'une suite convergente de polynômes en A est un polynôme en A (un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est fermé).