- Q10a. Il s'agit de voir que le groupe G agit transitivement sur les sphères ; ceci a rarement été justifié de façon convaincante.
- Q11a. Trop de candidats, tout en ayant peut-être une idée correcte de la démonstration, en ont donné une rédaction erronée, par exemple : "Ecrivons $P = a_k X^k + \cdots + a_0$, alors P a au plus k racines ; contradiction." On ne peut pas avoir de contradiction s'il n'y a pas d'hypothèse absurde !
- Q11b. Quelques candidats pensent à considérer un polynôme à n variables comme un polynôme en une variable en fixant $n-1$ variables. La question est délicate à rédiger correctement. Elle a découragé beaucoup de candidats.
- Q12. S'il est clair que la matrice d'un élément de K, dans la base canonique, a une dernière colonne égale à e_n, le fait que la dernière ligne est égale à la transposée du vecteur colonne e_n a été souvent oublié.
- Q13. Si l'inclusion $Im\ \varphi \subset \ldots$ a été souvent bien traitée, cela n'a pas été le cas de l'inclusion réciproque.
- Q14b. Cette question a été très peu abordée.
- Q14c. Trop de candidats ne pensent pas à vérifier que $a_k \neq 0$ pour dire qu'un polynôme $a_k X^k + \cdots + a_0$ est de degré k.
- Q15. On trouve parfois des fragments de réponses, par exemple pour 15-a) et 15-f), qui sont des applications directes du cours.
- La partie IV a été très peu abordée, à l'exception de la question 16 et de la question 20, où il s'agissait de prendre du recul en utilisant plusieurs des questions précédentes.
- La partie V, largement indépendante des précédentes, a permis a certains candidats de montrer des connaissances sur les matrices symétriques (notamment les questions 21 et 22c).

3.2 Seconde épreuve écrite

3.2.1 Enoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/

3.2.2 Remarques générales

Le premier objectif du problème est annoncé dans le préambule. Lorsqu'on a un coefficient dominant au sens de la relation (2), pour tout second membre dans $\ell^p(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$, l'équation (1) a une unique solution dans $\ell^p(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ (ceci est démontré dans la question 21). On ne traite dans le problème que les cas de $p = 1$ ou $p = \infty$, mais c'est vrai pour tout p.
Le résultat s'étend en non linéaire dans les espaces de Hilbert, en utilisant la méthode de Newton pour obtenir le résultat de surjectivité, et des techniques types d'EDP linéaires elliptiques. Mais comme le théorème de Lax Milgram nous aurait emmené très loin, la partie **V** s'est limitée au cas périodique, qui se passe donc en dimension finie, au prix d'une certaine lourdeur des notations. La partie **V** permettait difficilement le grappillage et n'a d'ailleurs été que très peu abordée.

Le jury a apprécié le bon niveau d'un certain nombre de copies, montrant la qualité du travail de préparation des candidats dans des conditions difficiles. Nous continuons à observer le phénomène récent d'apparition d'un nombre non négligeable de copies quasi-vides. En revanche, la sélectivité du concours fait que les candidats qui passent la barre de l'admissibilité ont un niveau certain.

Passons à des conseils et remarques, complétant ou répétant ceux des rapports précédents, qu'il est utile de lire également.

3.2.3 Conseils

Tout d'abord, les candidats ne doivent pas être surpris par la longueur des sujets. Celui de l'EP2 de cette année permettait aux candidats d'exprimer leurs compétences sur des thématiques variées : séries, espaces vectoriels normés de dimension infinie, calcul différentiel, etc. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de traiter une énorme portion du sujet pour être admissible, ni pour être reçu (mais ceci dépend alors de la prestation à l'oral). Un candidat traitant **parfaitement** les questions **1** à **8**, et ne rencontrant ainsi aucune question vraiment difficile, obtenait une note satisfaisante.

On attend notamment des candidats qu'ils traitent significativement les parties qu'ils abordent. S'il est normal de ne pas rester bloqué sur une question trop longtemps, la stratégie consistant à picorer des points de-ci de-là n'est pas efficace. Outre le fait d'indisposer le correcteur, qui dans les cas douteux aura alors une lecture moins favorable, la stratégie ne rapporte que peu de points ; par exemple, traiter parfaitement les trois questions que sont **7**, **11**, **17a** prendra sans doute plus de temps que traiter la plupart des autres questions du sujet, mais ne rapportera pas plus que l'une d'elle.

Les copies sont en général bien présentées, lisibles, font preuve d'honnêteté et ne sont pas écrites dans un style télégraphique. Les quelques rares copies ne respectant pas ces standards basiques ne sont pas évaluées par le correcteur avec la même indulgence. Rappelons que l'honnêteté intellectuelle et la capacité à argumenter ce que l'on écrit sont deux qualités attendues d'un professeur de mathématiques.

Concernant la rédaction, il y a deux écueils à éviter, et d'ailleurs la question **7** évoquée plus haut les a illustrés. Le moins grave est d'en dire trop : il faut savoir aller à l'essentiel. Une rédaction trop longue ne sera pas pénalisée, mais elle fait perdre un temps précieux. De plus, il arrive qu'à vouloir trop en dire le candidat écrive (par inattention ?) quelque chose de grossièrement faux, ce qui lui sera préjudiciable. Par exemple, le contre-exemple donné dans la question **2** est souvent $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$. Certains candidats justifient l'existence de cette somme en affirmant qu'elle vaut $\ln(2)$, ce qui est *visiblement* faux pour des raisons de signes. L'écueil inverse, lui fort dommageable, consiste à donner les résultats sans la moindre justification, parfois même sans le moindre mot. Outre le fait que cela ne rapportera rien (et c'est donc du temps perdu à l'écrire), ce comportement a tendance à mettre le correcteur dans des dispositions moins favorables. Ainsi, par exemple, pour montrer que $\ell^p(K, \mathbf{Z})$ est un $K-$espace vectoriel normé., la rédaction la plus efficace consiste à montrer **simultanément** mais **précisément** qu'il est un sous-espace vectoriel de $K^{\mathbf{Z}}$ et que $\|.\|_p$ est une norme sur cet espace.

De manière générale, en mathématiques toute affirmation doit être justifiée. Les termes *évident, clair* sont sans doute à bannir du vocabulaire. Ils font au correcteur un effet encore plus mauvais si la copie n'est pas irréprochable par ailleurs.

Concernant l'écriture des objets mathématiques, il faut inciter les candidats à être prudents, à se relire, et ne pas écrire des choses qui sont parfois visiblement fausses **voire qui n'ont pas de sens**. L'exemple donné plus haut est un peu subtil (il faut avoir en tête la démonstration du théorème sur les séries alternées) ; en revanche nous avons pu lire des affirmations comme : "$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui dépend de n", "$\sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge" (problème avec $t = 0$), "$|x_{n+1} - \alpha x_n| \leqslant |x_{n+1}| + \alpha |x_n|$" (problème si α n'est pas un réel positif), "$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ converge". Comme autres exemples d'objets dépourvus de sens, signalons dans la question **12** l'apparition de $(id - f)$ au dénominateur, ou encore dans la question **26 b** des produits tels $(y - x)g'(tx + (1 - t)y)$, qui n'ont du sens qu'en dimension 1. Le jury a également été surpris de voir des confusions entre les symboles $<$ et $\leqslant$. Ceci n'est pas normal au niveau de l'agrégation, surtout de la part de candidats majoritairement professeurs en exercice et qui enseignent ces symboles à leurs élèves. Au sujet des inégalités, rappelons aussi que, *par défaut*, **C** n'est pas muni de relation d'ordre (car il n'y en n'a pas de compatible avec sa structure de corps). Ainsi, des inégalités entre complexes sont très mal vues, à moins que le signe $\leqslant$ ne soit défini par le candidat et que les opérations faites avec soient toutes licites au vu de la définition donnée.

3.2.4 Commentaires question par question

La partie **I** avait pour but, à partir des séries indexées par **N**, à passer aux séries indexées par **Z**. Elle commence par deux questions de cours, qui sont des arguments de base dans un cours sur les séries. Les candidats doivent bien maîtriser leur cours : c'est bien entendu nécessaire pour l'oral, mais aussi pour l'écrit où certaines questions de cours peuvent apparaître, soit explicitement comme ici, soit plus implicitement au détour d'un argument ressemblant à un argument classique figurant dans le cours.
Du fait même de sa formulation, mais aussi grâce à la toute première phrase du sujet, il apparaît que dans la question **1** le jury n'attendait pas une démonstration détaillée mais d'en extraire l'argument crucial. Bien entendu, une démonstration correcte sera appréciée, mais ne rapportera pas plus. Nous attendions donc une phrase du type : *la suite des sommes partielles est croissante et a donc pour limite sa borne supérieure, en raison du théorème de la limite monotone*. Le jury a été surpris en revanche du peu de copies réussissant cette question, soit en extrayant l'argument, soit en refaisant la démonstration.
Le sujet distingue bien l'existence du symbole somme, qui peut exister dans $\overline{\mathbf{R}}$, de la convergence de la série (qui nécessite pour la limite d'être dans **R** -ou **C**-). Ainsi pour l'existence du symbole somme, il n'est pas nécessaire que la suite des sommes partielles soit majorée. Une copie parlant de la convergence de la suite des sommes partielles du fait de sa croissance, mais qui ne précise pas qu'elle parle de convergence dans $\overline{\mathbf{R}}$, sera réputée n'avoir traité que le cas croissant majoré, puisque le sujet n'emploie le terme convergence que dans le cas des limites finies.
La question **2** a fait apparaître une erreur classique : ce n'est pas parce qu'une suite est bornée qu'elle converge. Il faut soit utiliser le critère de Cauchy, soit se ramener à **R** et traiter les parties négatives et positives. Pour le contre-exemple, signalons qu'il suffit d'en donner un avec une suite à valeurs réelles, cette dernière étant *a fortiori* à valeurs complexes.
La question **3a** était sans doute la plus difficile de la partie **I** et a fait apparaître des manipulations hasardeuses des sup.
La question **3b** contient deux informations. La première utilise le même argument que la question **1** ; pour la deuxième on peut séparer la série en deux ou utiliser habilement le **3a** (ce dernier fournit trivialement une seule inégalité, il faut travailler un peu pour l'autre).
La question **3c** démontre quelque chose qui semble une évidence ; encore faut-il la rédiger correctement. Certains écrivent que $\sum_{t=-N}^{N} u_{t+1}$, qui vaut $\sum_{t=-N+1}^{N+1} u_t$, est le terme d'une sous-suite de $(V_N)_N$.
Le **4a** est une application directe du **2**, quant au **4b**, quoique rarement traité, il a en général été réussi.

La partie **II** introduit les deux espaces ℓ^p qui nous intéresseront pour l'existence des solutions à l'équation (1). Le jury a été assez strict quant à l'évaluation des démonstrations. On obtenait la structure d'espace vectoriel en montrant qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels de $K^{\mathbf{Z}}$. Il faut bien entendu préciser l'espace ambiant dont ℓ^p va être un sous-espace vectoriel. Là on attendait

une explication propre de la stabilité. Des majorations (naturelles) qui certes conviennent mais qui sont faites rapidement et sans le moindre mot d'explication ne rapportent pas nécessairement tous les points. C'est encore plus vrai pour la norme 1. Ne pas oublier qu'un sous-espace vectoriel est nécessairement non vide. Enfin, signalons que la démonstration *directe* qu'un ensemble est un espace vectoriel nécessite la vérification d'une séquence complète d'axiomes, et qu'il faut à tout prix éviter cette stratégie (sauf bien entendu lors d'un cours sur les espaces vectoriels.). S'il est possible de traiter simultanément l'aspect sous-espace vectoriel et le fait que l'application satisfasse les propriétés d'une norme, il n'est pas possible de montrer *d'abord* que $\|.\|_p$ est une norme *puis* que ℓ^p est un sous-espace vectoriel : rappelons en effet qu'une norme est définie sur un espace vectoriel. Enfin, le terme "évident" est à éviter. Si c'est évident, on peut donner l'argument clé en un mot. On a été surpris de lire, par exemple, *il est évident que l'espace est de dimension infinie, mais je ne sais pas le montrer.* Pour l'aspect dimension infinie, il fallait à la fois exhiber une famille libre à un nombre infini d'éléments, puis aussi montrer qu'elle convenait. Cette notion de famille libre (à un nombre dénombrable d'éléments) a posé quelques difficultés. Quelques candidats ont proposé un exemple d'endomorphisme injectif non surjectif, ce qui est une démonstration originale et élégante.
Dans la question **8**, on attend naturellement que les deux inclusions soient regardées. Les candidats ont en général bien traité cette question, s'appuyant sur la suite 1 pour voir que ℓ^∞ n'est pas inclus dans ℓ^1. Pour le sens réciproque, on peut bien entendu voir que $\sup |x_t| \leqslant \sum_{t\in\mathbf{Z}} |u_t|$. Si on utilise le fait que la suite tend vers 0 (du fait de la convergence de la série) pour en déduire qu'elle est bornée, il ne faut pas oublier d'évoquer aussi le cas de $t \to -\infty$.
Les questions **9** et **10**, nettement plus difficiles, ont été peu abordées avec succès, sauf pour le début du **a**. Notons que la partie **b** nécessite bien trois étapes : la convergence ponctuelle, le fait que la limite x soit dans ℓ^p, et *seulement après* que $x^{(n)}$ tend vers x dans ℓ^p. Tant qu'on ne sait pas que $x \in \ell^p$, on ne peut pas parler de la norme de $x^{(n)} - x$.

La partie **III A)** commence par une question élémentaire, quasiment toujours traitée avec succès. Comme d'habitude, on attendait une justification, même courte. Des réponses non justifiées ne rapportent pas de point.
La question **12a** ne suppose pas f linéaire, et c'est d'autant plus clair que l'hypothèse de linéarité est écrite en toutes lettres dans **12b**. Très peu de candidats ont vu le lien entre le théorème du point fixe et la question posée. L'équation $x - f(x) = y$ équivaut à trouver un point fixe de l'application (y étant fixé), $x \mapsto y + f(x)$. Cette application n'ayant qu'un unique point fixe, l'équation de départ a bien une solution et une seule. Plusieurs candidats obtiennent l'injectivité. Ceux qui transforment discrètement le mot injectif en bijectif ne mettent pas les correcteurs de leur côté. La question **12b** fait souvent appel à certaines connaissances des candidats. Elle nécessitait cependant du soin pour justifier tous les passages à la limite. L'argument le plus rapide, pour ceux qui ont vu le lien avec le point fixe dans le **12a**, consistait simplement à constater que la suite donnée à droite est la suite des itérations obtenues en partant de $x_0 = y$, dont on sait qu'elle converge vers le point fixe.

Les parties **III B)** et **III C)** n'ont pas été beaucoup abordées, sauf sur les questions **17a-17b**.
La question **17a** étant élémentaire et susceptible de servir au grappillage, on attend une justification correcte, même courte. La fin du **b** nécessitait de bien choisir x_0, de sorte à avoir une limite nulle en $+\infty$, ce qui est une condition nécessaire pour être dans ℓ^1. Ceci n'a été vu qu'exceptionnellement.
La question **18**, difficile par la nécessité de rassembler les résultats de plusieurs questions précédentes et par celle d'une réelle prise d'initiative pour le cas $p = 1$ et $|\alpha| = 1$ avec $\alpha \neq 1$, a très rarement été traitée complètement.

La partie **III D)** a été abordée dans un certain nombre de copies.
La question **22** utilise (par exemple) la question **12**.

La question **23** est une relecture du **22**, mais nécessite du soin. Il faut avoir précisé les inverses, constaté que l'on a une relation simple entre les endomorphismes, appliquer (en le justifiant) la formule du binôme, voir ce qu'est le $S^k((u_n)_n)$ et enfin constater que l'on a une égalité entre deux suites, dont on évalue les premiers termes. Il y avait ainsi un certain nombre de manipulations, rarement faites dans leur intégralité.
La question **24** pose des problèmes de passage à la limite à l'intérieur d'une série. Les théorèmes de Beppo-Levi et de convergence dominée, indiqués dans le cadre discret dans le préambule, avaient été rappelés pour ces questions. Parmi ceux qui les ont abordées, une partie non négligeable des candidats semble penser que le passage à la limite à l'intérieur d'une série est gratuit.

Le reste du problème a été peu traité.
Le **IV E** commence par des faits basiques sur le calcul différentiel, qui est peut-être moins dans la culture des candidats. L'aspect C^1 pouvait se faire à la main. Certains candidats adoptent la stratégie de constater que $DL(x) = L$. Dans ce cas, signalons que l'aspect C^1 de l'application L (qui est la continuité de $x \mapsto DL(x)$) ne résulte pas de la continuité de L (qui donne sa différentiabilité), mais simplement du fait que $x \mapsto DL(x)$ est constante. Ceux qui ont abordé cette partie se sont en général arrêtés au **26b**. Ces questions ont posé des difficultés, le **25** étant rarement intégralement traité et le **26b** donnant souvent des formules n'ayant pas de sens, écrites comme si g était une fonction d'une seule variable.
Quelques candidats ont abordé la partie **IV F**. La principale difficulté était de traiter par une seule récurrence les deux lignes de la question **30**, afin de pouvoir utiliser la question **29**.
Le **V** n'a été que très peu abordé.